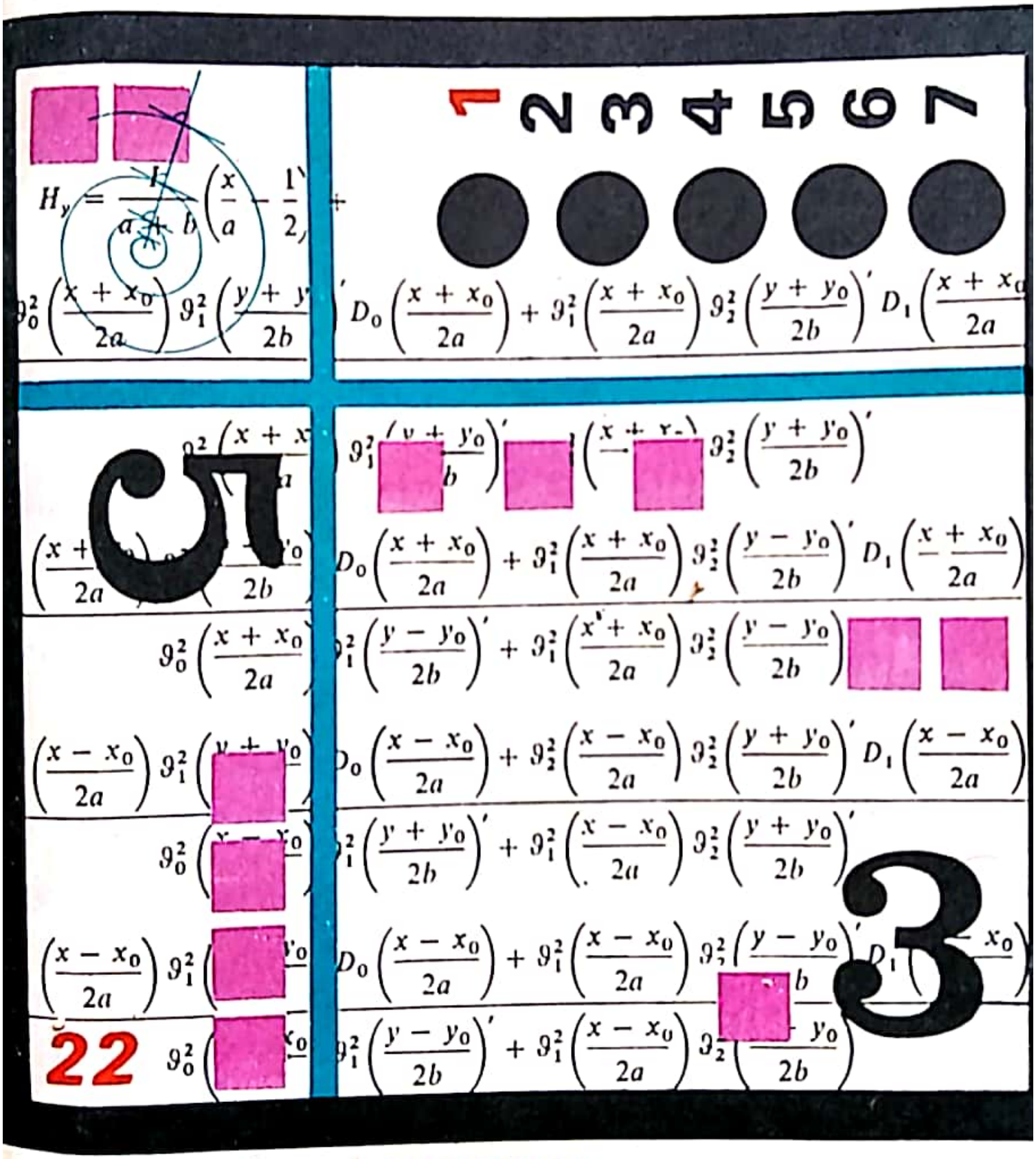
Florica T. Câmpan

PROBLEME CELEBRE



Lyceum

Florica T. Câmpan

PROBLEME CELEBRE

Desenul copertei de:
VAL MUNTEANU

Lyceum 27

Prof. dr. docent
Florica T. Câmpan

PROBLEME CELEBRE

din istoria matematicii

EDITURA TINERETULUI

Problemele celebre din istoria matematicilor sînt surorile celebrelor povești din 1001 de nopți fiindcă, prin conținutul lor, trezesc aceeași vibrantă emoție, curiozitate și plăcere ca și poveștile pe care Șeherazada le-a spus lui Șah-Riar. De altfel, prima ei poveste, aceea a negustorului care ar fi fost ucis de duhul cel aprig din pustiu dacă nu ar fi intervenit cu atîta zel șeicii-călători, pare o prezentare metaforică a caracterului comun al acestor probleme. Oare-i mai puțin chinuitoare frămîntarea din sufletul matematicianului care s-a străduit zadarnic, timp îndelungat, să dezlege problema rămasă din veacurile trecute fără de răspuns, decît aceea a negustorului năpăstuit care vine, după ce i s-a încuviințat un an de răgaz, ca să-și primească osînda? Și nu-i o fidelă întruchipare a strînsei colaborări internaționale — în timp și spațiu — imaginea celor trei șeici — călători iviți pe rînd din țări necunoscute, care aflînd povestea urgisitului ce-și așteaptă moartea, intervin cu pasiune și înduplecă duhul să-i reducă treptat pedeapsa, pînă-l absolvă complet de ea?

Numeroase, variate și tot așa de încîntătoare ca și poveștile Șeherazadei, problemele celebre din istoria matematicilor nu se sfîrșesc însă după 1001 de nopți, ci continuă să se desăvîrșească sau să înceapă și azi. Volumul de față cuprinde numai cîteva dintre ele. Află, o, tu Șah-Riar-Cititor, că în volumele ce vor urma vei găsi și altele. Chezășie pentru deplina lor înțelegere sînt noțiunile de matematici dobîndite în școala medie.

PROBLEMA DESPRE TAURII SOARELUI

SAU POVESTEA UNEI DIHONII ÎNTRE MATEMATICIENI, STÎRNITĂ DE UN DRAMATURG

Vara trecută, prietenul meu Teodor Solonar din Cîmpulung-Moldova m-a invitat la el. Am primit cu bucurie, gîndindu-mă la plimbările ce le vom face prin maiestuoasele păduri către munții din apropiere, cavaleri supuși ai voievodului Rarău, și care poartă pe creștet, drept coroană, Pietrele Doamnei.

Dar după cîteva zile senine vremea s-a stricat. Din cerdacul cu geamlîc priveam cum se zbate în pîclă conturul munților sau urmăream goana burhaiului[1] pe deasupra pădurilor, ca un fum dens și alb, de parcă ploaia ar fi aprins copacii. Într-o dimineață, pe cînd norii se ocărau cu înverșunare, scăpărînd fulgere de mînie, prietenul meu, pasionat matematician, aduse un caiet și, punîndu-l pe masa din cerdac, îmi spuse:

— Vrei să dezlegăm problema taurilor lui Helios?

— A taurilor lui Helios? întreb eu nedumerit. Pare mai degrabă o problemă de mitologie decît de matematică. Știu că Homer povestește despre ei în cîntul al XII-lea din *Odiseea*. Ascultă versurile...

— Se poate, mi-a răspuns prietenul după ce m-a ascultat fără să mă întrerupă. Dacă le-ai spus bine sau rău n-am de unde s-o știu, ritmul însă l-ai păstrat perfect. Eu le cunosc din traducerea lui Murnu, pe care o am aici:

„Iar cînd scăpărăm noi de stînci, de Scila
Și de Charibda cea cumplită, iată
Ne pomenim la insula cea sfîntă
A zeului. Acolo erau boii
Cei mîndri și fruntoși, oi multe grase
De-a Soarelui..."

[1] Ceață (rară) care se ridică după ploaie.

— Te înșeli, i-am răspuns eu, tu mi-ai citit numai începutul, pe cînd eu ți-am recitat și versurile în care se arată că nenorocirea lui Ulise a început atunci cînd tovarășii lui, îndemnați de Evriloh, s-au ospătat cu boii cei grași ai Soarelui. Nu văd însă cum se poate țese o problemă matematică din firele acestei tragedii.

— Dar nu s-a gîndit nimeni la tragedia lui Ulise; pe tine poate că te atrage ea așa cum l-a atras pe el cîntul sirenelor. Autorul problemei se întreabă doar cîți tauri și cîte vaci pășteau atunci pe insula Siciliei? El e curios să afle cît de mari erau turmele atotputernicului Zeus, care s-a putut mînia așa de cumplit pe niște bieți oameni lihniți de foame...

— Se vede că autorul tău n-a cunoscut *Odiseea!* Eu știu foarte bine cît de numeroase erau acele turme, căci i-o spune Circe lui Ulise cînd îi prevestește nenorocirile ce-i stau în cale. Nu-ți aduci aminte de începutul cîntului al XII-lea? „Vei sosi în insula Trinacria, unde pasc boii și oile Soarelui, cîte 7 cirezi de fiecare fel și fiecare de cîte 50 de capete. Aceste vite nu fată și nici nu mor și nici nu îmbătrînesc, iar fetele Soarelui, acele zîne cu păr de aur, pasc turmele..."

— Așa spunea Circe, care, ca și tine de altfel, nu-și bătea capul cu matematica. Dar autorul problemei consideră că Helios, zeul soarelui, putea dispune de turme mai bogate decît acelea despre care amintește ea. Nu cred că Circe avea o noțiune prea precisă despre numere. Pe vremea ei, 50 trebuie să fi fost un număr foarte mare și mă îndoiesc că ea ar fi putut ajunge să-l intuiască, bineînțeles că nu afirm asta și despre tine!

— Dacă ai păreri așa de bune despre mine înseamnă că problema ta trebuie să fie destul de simplă. Citește-o, să văd ce voi înțelege din ea.

— Bine, dacă n-ai de gînd să mă mai întrerupi, ascult-o și apoi vom sta de vorbă:

„Calculează-mi, prietene, numărul vitelor cornute ale lui Helios, dar să te gîndești serios, dacă ai pretenția că ești om de știință. Cîte pasc în cîmpiile Siciliei, insula cu 3 unghiuri? Ele se împart în 4 cirezi de culori diferite. Unele sînt albe ca laptele, altele de un negru strălucitor, altele

roșii, iar ultimele bălțate. Fiecare circadă are un număr mare de tauri și sînt unii față de alții în acest raport:

1. Cei albi sînt atîția cît $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$ împreună din cei negri, plus toți cei roșii;

2. Cei negri sînt cît $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{5}$ din cei bălțați, plus toți cei roșii;

3. Cei bălțați sînt $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{7}$ din taurii albi, plus numărul total al celor roșii;

4. Vacile cele albe sînt $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ din întreaga circadă neagră.

5. Cele negre $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ din toată cireada bălțată, cînd vacile pasc la un loc cu taurii;

6. Cele bălțate fac $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ din cireada vitelor roșii;

7. Cele roșii fac cîte $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ din toată turma albă.

Dacă-mi spui numărul cornutelor Soarelui, separat numărul taurilor bine hrăniți și pe cel al vacilor, și cîte din fiecare culoare, nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nu vei fi socotit încă printre învățați. Căci iată ce se mai știe despre aceste vite ale lui Helios:

8. Atunci cînd mulțimea taurilor albi se unește cu aceea a celor negri, ei formează împreună o figură pătrată, iar marea lor întindere umple toată suprafața insulei cu trei unghiuri.

9. În fine, dacă taurii roșii se așază pe rînduri, împreună cu cei bălțați, începînd cu unu și crescînd succesiv cu cîte unu, ei formează figura unui triunghi, fără să fie printre ei tauri de altă culoare și fără să se remarce absența acestora. Dacă vei afla și vei putea arăta care sînt aceste numere, atunci înaintează glorios și triumfător, prietene, convins fiind că ești un om desăvîrșit în această știință".

— După stil, aș zice că problema este o traducere.

— Desigur, ea a fost scrisă în versuri grecești. Cuprinde 22 de distihuri, hexametri alternînd cu pentametri. Dacă vrei să o citești în original, poftim, o am copiată în acest caiet.

— Îmi pare rău că nu-ți pot lăuda ortografia, lipsesc o mulțime de accente, mai ales spiritele care au atîta importanță în ortografia greacă, l-am necăjit eu după ce am citit-o. Totuși, trebuie să admit că-i lăudabilă silința ta de a transcrie originalul. Am mai întîlnit probleme scrise în versuri — numite *epigrame* — în antologia greacă. Îmi aduc aminte, de pildă, de aceea în care se cere să se afle cît cîntărește statuia de aur a Minervei: „Eu sînt o Minervă de aur masiv. Metalul este un dar al tinerilor poeți..." Sau de aceea cu bazinul de apă pe care-l umple o cișmea în chip de leu: „Sînt un leu de bronz, două izvoare curg din ochii mei, altul din botul meu și altul din laba mea cea dreaptă. În două zile ochiul meu drept umple bazinul, ochiul meu stîng în trei..." și așa mai departe, întrebarea fiind în cît timp se umple bazinul cînd toate izvoarele curg împreună.

— Într-adevăr, problema taurilor este o epigramă, deși cuvîntul nu-i potrivit!

— Se prea poate, dar e o numire consacrată. Grecii au dat acest nume inscripțiilor, adesea în versuri, gravate pe monumente, morminte sau statui. Însă chiar din epoca alexandrină, epigramele nu se mai compuneau ca să fie înscrise pe monumente, ci ca să fie citite în diverse ocazii, ca poezii. De atunci ele își păstrează acest nume în antologiile grecești. Însă n-am întîlnit nici una cu taurii Soarelui în culegerile care le-am cercetat eu, deși nu exagerez dacă-ți spun că am găsit vreo 40 de probleme-epigrame.

— N-avea cum să figureze în vechile antologii grecești, pentru că a fost descoperită de-abia în 1773, de către Lessing, într-un manuscris necercetat pînă atunci.

— Lessing? Celebrul scriitor și dramaturg? S-a ocupat de matematici?

— Un motiv în plus ca să te apropii și tu cu mai multă dragoste de ele!

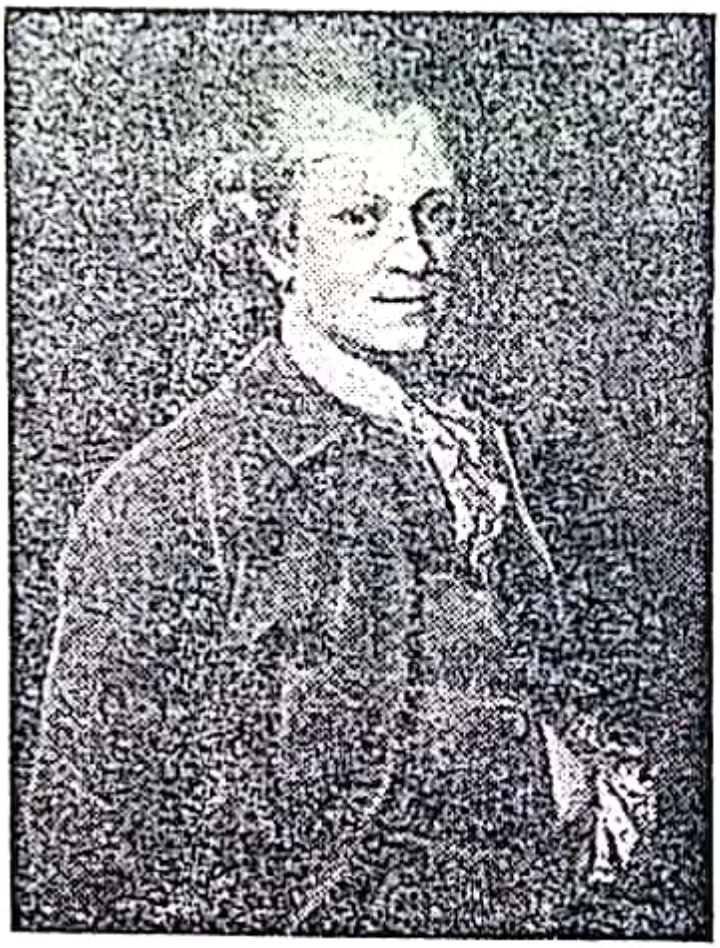


Fig. 1
Gotthold E. Lessing

— Totuși, nu-mi vine să cred! Am citit *Mina von Barnhelm*, *Emilia Galotti*, *Natan înțeleptul*, am mai citit *Scrisorile privitoare la literatură*, *Laokoon* și articolele din *Dramaturgia hamburgheză*, dar nicăieri nu am dat de vreo aluzie din care să deduc că el ar fi scris ceva despre problema taurilor sau despre oricare altă problemă de matematici!

— Nu ai găsit-o în lucrările de care-mi vorbești, fiindcă Lessing a publicat-o într-o culegere de texte grecești, urmate de comentarii. Manuscrisele acestor texte se găseau în biblioteca din Wolfenbüttel. El le-a găsit, le-a cercetat și publicat în 1773, pe cînd era bibliotecar acolo.

— Da, cunosc această ultimă și amară parte a vieții lui.

— Desigur că viața lui era amară din clipa cînd își termina serviciul de bibliotecar, dar poți tăgădui că acolo, în bibliotecă, nu trăia clipe de desfătare și de uitare a mizeriei

ce-l înconjura? Cînd răsfoia cărțile din jurul lui sau dădea peste vreun manuscris nedescifrat încă, uita de mizerie! Imaginează-ți ce surprins trebuie să fi fost cînd a dat peste aceste rînduri: „Problema pe care a propus-o Arhimede într-o scrisoare către Eratosthene din Cyrena acelora din Alexandria care se ocupă cu asemenea lucruri!"

— Așadar, problema a fost compusă de Arhimede? De ce nu mi-ai spus-o de la început? Ai considerat că-i mai interesant să o învălui în mister!

— Nu o învălui eu, că era gata învăluită în mister, de îndată ce se afirma că autorul ei este Arhimede!

— Cum, dar nu-i negru pe alb?

— O fi, dar Lessing, care știa probabil și el atîta greacă cît și tine, a pus la îndoială autenticitatea problemei. De aici s-au stîrnit o mulțime de discuții!

— Cred și eu! Dar nu înțeleg cum ar putea afirma cineva care nu cunoaște îndeaproape opera lui Arhimede dacă o problemă e scrisă sau nu de el?

— Nu greșești punînd problema în acest fel, numai că atunci și chiar mai tîrziu, în tot cursul veacului al XIX-lea, matematicieni mult mai competenți ca tine și ca mine au admis părerea lui Lessing, fără să se sesizeze de faptul că el nu cunoștea îndeaproape nici viața și nici opera lui Arhimede.

— Și dacă Lessing s-a îndoit de autenticitatea ei, cum de a mai publicat-o?

— Se vede că problema i-a plăcut! Ba i-a plăcut așa de mult, încît a prezentat-o unui savant matematician din orașul său, rectorului Chr. Leiste, rugîndu-l să o verifice. Căci nu ți-am spus că, în manuscrisul găsit de Lessing, problema se continuă cu o notă, în care se arată rezultatul.

— De ce nu-i spui *scolie*, căci acesta-i termenul consacrat în literatură, pentru *notele* care urmează după un text?

— Fie. Această scolie cuprinde următoarea soluție a problemei, fără însă a indica felul în care a fost stabilită:

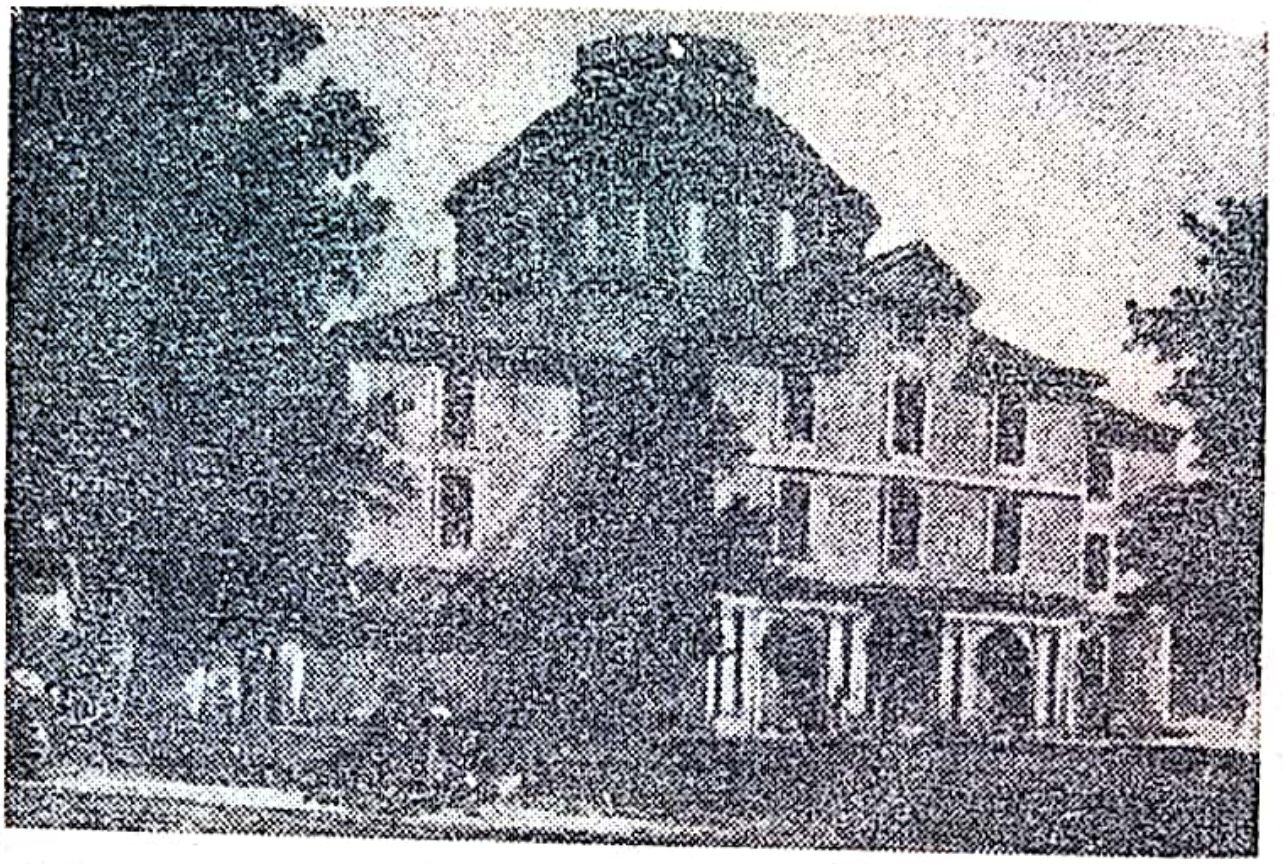


Fig. 2
Biblioteca
din Wolfenbüttel

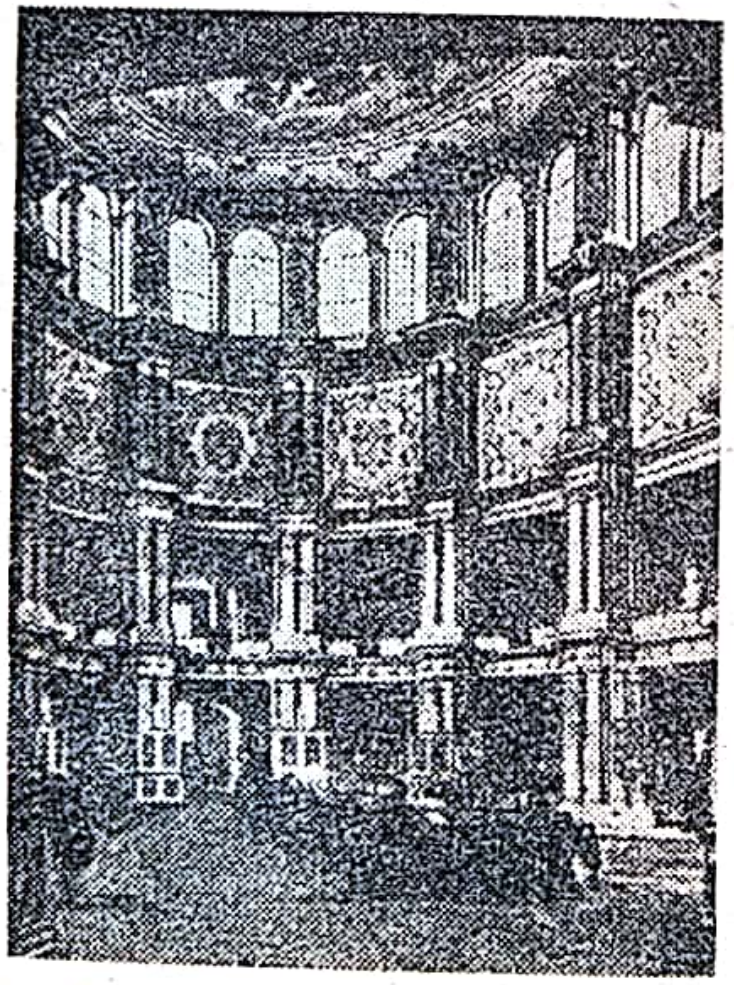


Fig. 3
Sala de lectură a
bibliotecii din Wolfenbüttel

„Fie A numărul taurilor albi și a numărul vacilor albe,
„ N „ „ negri n „ „ negre,
„ R „ „ roșii r „ „ roșii,
„ B „ „ bălțați b „ „ bălțate:

$A = 829\,318\,560 = \frac{5}{6} N + R$

în total $A + a = 1\,405\,827\,360$

$a = 576\,508\,800 = \frac{7}{12} (N+n)$

$N = 596\,841\,120 = \frac{9}{20} B + R$

în total $N + n = 988\,300\,800$

$n = 391\,459\,680 = \frac{9}{20} (B+b)$

$B = 588\,644\,800 = \frac{13}{42} A + R$

în total $B + b = 869\,910\,400$

$b = 281\,265\,600 = \frac{11}{30} (R+r)$

$R = 331\,950\,960$

$r = 435\,137\,040 = \frac{13}{42} (A+a)$

în total $R + r = 767\,088\,000$

În total 4 031 126 560

Rectorul Chr. Leiste a cercetat problema și a stabilit că, lăsînd de o parte ultimele două condiții, numerele arătate de scoliast o verifică. Totodată, el a găsit și o altă soluție, care are avantajul că se exprimă prin numere mai mici. Aceasta se obține, împărțind numerele arătate de scoliast prin 80.

— Oricum, strașnice numere! Sînt curios cît timp cer asemenea calcule?

— N-avem decît să încercăm! După cum vezi, afară toarnă cu găleata!

— Atunci, hai la treabă! Întîi ajută-mi să traduc în limbajul algebric și în ordinea indicată de text cele 9 condiții impuse de problemă. Cred că e bine să păstrăm notațiile care le-ai indicat mai sus. Ce spui?

— Desigur. Însă nu văd cum îți pot ajuta, fiindcă ai și început să le scrii foarte corect.

— E bine? Atunci privește cele 9 ecuații, pe care le numerotez, ca în text, cu cifre romane:

$$\text{I. } A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) N + R$$

$$\text{II. } N = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) B + R$$

$$\text{III. } B = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) A + R$$

$$\text{IV. } a = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (N + n)$$

$$\text{V. } n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (B + b)$$

$$\text{VI. } b = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (R + r)$$

$$\text{VII. } r = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (A + a)$$

VIII. $A+N$ să fie un pătrat.

IX. $R+B$ să fie un număr triunghiular.

Nu înțeleg însă, de ce s-a folosit această formă curioasă de a scrie numerele fracționare ca sumă de două fracții cu numărătorul 1, cînd era mult mai simplu să se fi făcut adunarea lor și să se fi scris un singur număr fracționar?

— Acest mod de a scrie fracțiile, m-a lămurit prietenul meu, nu-i nici întîmplător, și nici nu arată neștiință, ci o influență de origine egipteană. Știi cum priveau egiptenii numerele fracționare? Ca pe niște numere aparte, care reprezentau o anumită parte a unității. De exemplu: o jumătate era reprezentată printr-un semn special, care corespunde în scrisul nostru cu fracția $\frac{1}{2}$, o pătrime avea alt

semn, echivalent semnului nostru $\frac{1}{4}$ ș.a.m.d., după cum vezi numai fracții cu numărătorul 1.

— Nu-i greu să-ți imaginezi cum au ajuns egiptenii la această reprezentare a fracțiilor! Ele trebuie să le fi apărut în procesul de măsurare a suprafeței unui teren care nu cuprindea un număr întreg de unități de arie. Putea să rămînă neexprimată, prin unitatea respectivă, $\frac{1}{2}$ de unitate sau $\frac{1}{4}$ sau $\frac{1}{8}$. Pentru mărimea acelei porțiuni de teren ei au stabilit atunci notații speciale, pe care le-au privit ca pe niște *noi unități de măsură*.

— Fracțiile s-au ivit și la întocmirea calendarului. Anul a fost împărțit în 12 luni și luna în 30 de zile. Prima zi a lunii era socotită ca reprezentînd $\frac{1}{30}$ dintr-o lună, ziua a 10-a însemna deci $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ din lună. Iată o altă fracție, prin care se exprima *o unitate de timp*. Și tot așa s-au ivit fracțiile pe rînd, și în alte procese de măsurare. De aceea egiptenii au notat fracția-tip $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3...$) cu un semn special.

— Mi se pare că aceste fracții au și un nume special?

— Da, fracțiilor cu numărătorul 1 li se spun uneori fracții alicote.

— Și egiptenii au folosit în calcule numai fracții alicote?

— Se pare că da, deși tot la egipteni au apărut, mai tîrziu, alături de aceste fracții, și fracțiile de forma $\frac{2}{n}$, unde n este impar ($n = 2p + 1$).

— Cred și eu că n trebuie să fie impar, căci dacă n este par fracția se reduce, prin simplificare, la o fracție alicotă! Și atunci pentru acestea au inventat alte semne?

— Nu, ci le-au redus la fracții alicote. În unul dintre cele mai vechi papirusuri matematice rămase de la ei, papirusul Rhind, care se află la Londra, în Biblioteca de la British

Museum, se găsește o tabelă de descompunere a fracțiilor de forma $\frac{2}{n}$, de la $n = 3$ la $n = 101$, în fracții cu numărătorul 1.

— Dar pe $\frac{2}{3}$ nu-l descompuneau?

— Uneori da, în $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, însă de cele mai multe ori această fracție, ca și $\frac{3}{4}$, care intervenea adesea în calculele lor, era lăsată așa. Celelalte toate le descompuneau. De exemplu, în loc de $\frac{2}{5}$, ei scriau $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30}$ sau $\frac{2}{29} = \frac{1}{29} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{174}$.

— Bine, dar acest calcul pare foarte complicat. Eu nu m-aș pricepe de loc la el!

— Pentru egipteni, din contra, această reducere a fracțiilor de forma $\frac{2}{n}$ la o sumă de fracții-tip reprezenta o simplificare a problemei. Deși descompunerea ar fi putut fi făcută în moduri diferite, ea era făcută numai într-un anumit fel, așa cum se arăta în tabele; se constată aceasta din diferitele manuscrise matematice care au fost descifrate. De altfel, tocmai fiindcă un calcul cu fracții era destul de greu de efectuat, problema fracțiilor a căpătat o așa de mare importanță în timpurile vechi. Descompunerea folosită de egipteni o întîlnim și la greci și s-a menținut pînă tîrziu, în primele secole ale erei noastre. De aceea nu-i de mirare, ci e natural să întîlnim fracțiile din problema noastră scrise sub această formă. Dar noi n-avem decît să le transformăm cum dorești. Deocamdată ne limităm numai la primele trei ecuații:

I $A = \frac{5}{6} N + R$ $\qquad 6A = 5N + 6R$

II $N = \frac{9}{20} B + R$ sau, eliminînd numitorii: $20N = 9B + 20R$

III $B = \frac{13}{42} A + R$ $\qquad 42B = 13A + 42R$

— Deși ecuațiile nu-mi par prea complicate, nu mă împac cu 3 ecuații și 4 necunoscute. Mi-aduc aminte că ar trebui să fie tot atîtea ecuații cîte necunoscute. Ba, dacă mă uit la întregul sistem pe care îl am în fața mea, și el îmi pare tot așa de curios, căci sînt de toate 9 ecuații și numai 8 necunoscute.

— Într-adevăr, problema are 8 necunoscute, care sînt legate în prima parte a problemei prin 7 condiții, la care se adaugă în partea a doua încă două condiții noi. Dacă ținem seama numai de primele 7 condiții, atunci avem un sistem de *ecuații nedeterminate*, iar problema care te-a înspăimîntat face parte din domeniul numit *analiză nedeterminată*. Numirea însăși cred că răspunde nedumeririi tale. În general, ecuațiile dintr-o problemă traduc în limbaj algebric diferitele condiții la care sînt supuse mărimile necunoscute. Dacă numărul condițiilor nu egalează pe acela al mărimilor necunoscute și rămîne mai mic decît ele, înseamnă că valoarea acestor mărimi rămîne nedeterminată, fiindcă nu numai ele singure, ci și altele ar mai putea fi obligate să îndeplinească condițiile rămase neprecizate. Cu alte cuvinte, problema poate avea mai multe soluții, toate la fel de acceptabile, legate între ele printr-unul sau mai mulți factori, care pot lua valori arbitrare. Așa sînt, de pildă, valorile pe care le indică scoliastul în problema taurilor și acelea la care ajunge rectorul Chr. Leiste. De ce? Pentru că deși scoliastul afirmă că „$A+R$ este un pătrat, iar $T+R$ este un număr triunghiular", aceste două condiții nu sînt îndeplinite, ceea ce dovedește că problema a fost rezolvată fără a se ține seama de ele. Nici Leiste nu a considerat ultimele două condiții. De aceea, după cum ți-am spus, un sistem de valori se obține din celălalt prin înmulțire (sau împărțire) cu *factorul constant 80*. Nu-i același lucru cînd numărul ecuațiilor este mai mare decît al necunoscutelor. Unei singure mărimi nu-i poți impune să satisfacă mai multe condiții diferite, căci acestea sînt în general contradictorii. Cînd se întîmplă așa, problema este considerată ca imposibilă și nu are soluții. Dar sînt cazuri cînd, deși aparent numărul ecuațiilor este mai mare decît numărul necunoscutelor, în realitate unele dintre ecuații repetă, sub altă formă, condiții puse anterior. Vezi

bine că atunci, numărul ecuațiilor ar putea fi egal cu cel al necunoscutelor și problema are o soluție unică, deși aparent ar fi putut fi privită ca imposibilă. Cum se prezintă cazul în problema taurilor vom vedea pe parcurs, deocamdată să rezolvăm sistemul nedeterminat pe care îl ai în față. Am putea să încercăm să eliminăm pe N și B.

— N poate fi ușor eliminat dacă înmulțim prima ecuație cu 4 și o adunăm la a doua. Avem în acest caz: $24A = 9B + 44R$.

— Într-adevăr, să considerăm acum sistemul

$$24A = 9B + 44R$$

$$42B = 13A + 42R$$

și să procedăm la fel.

— Da, dar aici 9 și 42 au ca factor comun pe 3, așa că prima ecuație o voi înmulți cu 14 și a doua cu 3. Prin adunare se obține:

$$297A = 742R \quad \text{sau} \quad A = \frac{742}{297} R.$$

— Ai obținut astfel pe A exprimat cu ajutorul lui R sau, cum spunem noi, pe A în funcție de R. Mai departe sper că nu mai am nevoie să intervin.

— Cred și eu. Din primele două ecuații găsesc pe N și B:

$$N = \frac{178}{99} R \quad \text{și} \quad B = \frac{1580}{891} R.$$

— Atunci hai să rezolvăm și celelalte patru ecuații care urmează.

Întîi am să le scriu sub forma:

IV $a = \frac{7}{12} (N + n)$ VI $b = \frac{11}{30} (R + r)$

V $n = \frac{9}{20} (B + b)$ VII $r = \frac{13}{42} (A + a)$

Cred că ar trebui să înlocuiesc pe A, B și N și apoi să văd ce obțin.

— Poate că ar fi prea complicat. Ai putea încerca aceeași metodă de mai înainte, anume să reduci din ecuația a IV-a și a V-a pe n, apoi din ecuația pe care ai s-o găsești și din a VI-a pe b și apoi tot așa din noua ecuație și a VII-a pe r și să găsești astfel o ecuație care conține numai pe a și A, B, N. Aici poți înlocui pe A, B și N cu valorile cunoscute și vei obține pe a în funcție de R. Ca să găsești acest rezultat deodată, înmulțește ecuația a IV-a cu 4800, a V-a cu 2800, a IV-a cu 1260, a VII-a cu 462 și le adună.

— Într-adevăr, în acest caz avem:

$$4800\,a + 2800\,n + 1260\,b + 462\,n = 2800\,(N + n) + \\ + 1260\,(B + b) + 462\,(R + r) + 143\,(A + a)$$

sau:

$$4\,657\,a = 2\,800\,N + 1\,260\,B + 462\,R + 143\,A$$

Înlocuind, făcînd adunările și eliminarea numitorului rămîne

$$297 \times 4\,657\,a = 2\,402\,120\,R$$

adică

$$a = \frac{2\,402\,120}{297 \times 4657} R$$

Acum trebuie să înlocuiesc pe a în ecuația a VII-a și să-l aflu pe r, în ecuația a VI-a și am să-l aflu pe b, iar din ecuația a V-a îl găsesc pe n.

Dar drept să-ți spun că mă înspăimîntă atîtea calcule. Vezi că n-am avut răbdare să-l înmulțesc nici pe 297 cu 4657.

— Nici nu era nevoie. Ba e mai convenabil să descompunem numărătorul și numitorul în factori primi, care vor permite simplificări în calculele ulterioare. Cred că-ți mai aduci aminte de numerele prime?

— Ceva în legătură cu divizorii unui număr?

— Da. Orice număr natural în afară de 1 are doi sau mai mulți divizori, adică se împarte exact prin două sau mai

multe numere întregi. De pildă, numărul 2 se împarte exact cu 1 și cu 2, numărul 3 se divide cu 1 și cu 3. Același lucru îl putem spune și despre numerele 5, 7, 11, dar nu despre 6. Numărul 6 are 4 divizori, pe 1, 2, 3 și 6, iar 12 are ca divizori numerele 1, 2, 3, 4, 6 și 12. Din acest punct de vedere, numerele se împart în *prime*, care au numai 2 divizori (pe 1 și pe el însuși), și *neprime*, care se descompun în numere prime. Numerele prime au fost cunoscute de către matematicienii din școala lui Pitagora. Ei sau alții dinaintea lor au observat că orice număr este sau prim sau format prin înmulțirea mai multor numere prime. Iată de ce e bine să descompunem numerele în factori primi.

— Atunci, hai să-l descompunem pe a. Avem:

$$a = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} R$$

Din ecuația a VII-a urmează:

$$r = \frac{13 \cdot 46 \cdot 489}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} R$$

Apoi din a VI-a

$$b = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 761}{3^3 \cdot 4657} R$$

și, în fine, din a V-a

$$n = \frac{2 \cdot 17 \cdot 15991}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} R$$

— După cum văd, am exprimat 7 dintre necunoscute cu ajutorul lui R. Dar R poate lua orice valori?

— Desigur că nu; numai acelea care înmulțite cu oricare dintre fracțiile de mai sus va da ca rezultat un *număr întreg*. Aceasta fiindcă e vorba de *un număr de vite cornute* care pasc pe un cîmp. Rezultă dar că R trebuie să fie divizibil cu produsul $3^4 \cdot 11 \cdot 4657 = 4\,149\,387$.

— Așadar, $R = 3^4.11.4657x$, unde x este un număr întreg oarecare și, ținînd seama de această valoare a lui R, rezultă că cele 8 necunoscute sînt:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\cdot3\cdot7\cdot53\cdot4\,657\cdot x = 10\,366\,482x \\
N &= 2\cdot3^2\cdot89\cdot4\,657\cdot x = 7\,460\,514x \\
B &= 2^2\cdot5\cdot79\cdot4\,657\cdot x = 7\,358\,060x \\
R &= 3^4\cdot11\cdot4\,657\cdot x = 4\,149\,387x \qquad (1) \\
a &= 2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23\cdot373\cdot x = 7\,206\,360x \\
n &= 2\cdot3^2\cdot17\cdot15\,991\cdot x = 4\,893\,246x \\
b &= 2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot761\cdot x = 3\,515\,820x \\
r &= 3^2\cdot13\cdot46\,489\cdot x = 5\,439\,213x
\end{aligned}
$$

După cîte văd, aceste valori nu coincid cu datele indicate în scolie.

— Nu, dar le găsești din (1) dacă faci $x = 80$.

— Drept să-ți spun că nu-mi vine să cred, i-am spus eu prietenului meu, satisfăcut și emoționat ca un școlar, cînd am văzut șirul numerelor găsite de mine. Am uitat de cînd nu am mai rezolvat o problemă de matematici și nu mai credeam că, după atîția ani, cu atîtea alte preocupări, aș mai fi în stare să o fac.

— Ce? m-a întrebat prietenul meu, făcîndu-se că nu mă înțelege.

— Că am ajuns la rezultat!

— Stai, nu te grăbi, mi-a răspuns el pe același ton. Uiți că problema spune că, obținînd acest rezultat „nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nici nu vei fi socotit printre învățați"?

— Nu uit aceasta și totuși mirarea mea rămîne. Mai mult chiar, mă întreb nedumerit cum de au stabilit grecii acest rezultat? Știu că ei aveau un sistem de scriere diferit de minunatul nostru sistem pozițional. Mă întreb cum s-au descurcat ei cînd au avut de făcut adunările, înmulțirile și împărțirile pe care le-am făcut eu, fără să mai spun nimic despre descompunerile în factori primi?

— Problema era într-adevăr foarte complicată pentru ei, dar nu nerezolvabilă. Pentru calcule ei foloseau *abacul*,

adică *numărătoarea* cu care se joacă azi copiii la grădiniță sau în prima clasă elementară! Dar nici în Europa, pînă prin veacul al XVI-lea, problema calculelor n-a fost mai ușoară! Cifrele romane sau cele slavone nu se deosebeau decît numai ca semne de scrierea numerelor folosită de greci. Însă despre modul de calcul de atunci va trebui să discutăm altă dată. Acum hai să ne întoarcem la celelalte două condiții impuse de problemă.

— Fie! Condiția a VIII-a spunea că $A+N$ să fie un pătrat, iar a IX-a că $R+B$ să fie un număr triunghiular. Nu cumva în aceste 9 ecuații vor fi mai multe condiții decît e necesar?

— Să vedem. Deocamdată trebuie să avem $A+N = Z^2$. Adică, considerînd valorile stabilite în (1):

$$Z^2 = 2\cdot 3\cdot 4657\cdot x\cdot (7\cdot 53+3\cdot 89);\ \text{însă}\ 7\cdot 53+3\cdot 89 = 638 = 2\cdot 11.29,$$

ceea ce dă:

$$Z^2 = 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\cdot x.$$

Înseamnă că x trebuie ales de așa natură, ca suma $A+N$ să fie un pătrat. Spune-mi deci, cît este x?

— Nu-i o întrebare prea grea: $x = 3.11.29.4657$.

— Răspunsul tău mi-a dovedit că întrebarea a fost destul de grea! Ai observat bine că Z ar trebui să fie format numai din factori ridicați la pătrat, dar ai uitat să-i păstrezi toată generalitatea. Oare răspunsul exact n-ar fi trebuit să fie $X = 3.11.29.4657\ t^2 = 4\ 456\ 749\ t^2$, t fiind un număr întreg oarecare?

— Ai dreptate! Folosind acest factor nedeterminat t problema *poate avea o soluție* chiar dacă i se mai impune încă o condiție. Dar, drept să-ți spun, nu știu ce înseamnă un număr triunghiular!

— Un număr triunghiular este acela care se poate descompune în produsul $\frac{n\,(n+1)}{2}$, n fiind un număr întreg oarecare. Sub această formă, el amintește de aria unui triunghi avînd ca bază un segment de lungime n și ca înălțime un segment

de lungime $(n+1)$. Condiția a IX-a spune că suma $R+B$ trebuie să se poată scrie ca un produs de această formă, adică să avem:

$$R + B = \frac{n\,(n+1)}{2} = 4657^2.3.11.29.t^2\,(2^2.5.79 + 3^4.11)$$

Dar $2^2.5.79 + 3^4 \cdot 11 = 2471 = 7.353$. De aici rezultă

$$\frac{n\,(n+1)}{2} = 3.7.11.29.353.4657^2.t^2.$$

Această condiție poate fi scrisă într-o formă mai simplă, notînd $2n+1$ cu u și 2.4657 t cu v. Înmulțind cu 8 avem:

$$(2)\quad 4n\,(n+1) = 2n\,(2n+2) = (u-1)\,(u+1) = u^2 - 1 = \\ = 2.3.7.11.29.353v^2.$$

Făcînd produsul, putem scrie ecuația (2) sub forma:

$$u^2 = 1 + 4\,729\,494\,v^2.$$

Avem, așadar, de rezolvat, în numere întregi, o ecuație de forma $cv^2 + 1 = u^2$, cunoscută în matematici sub numele de *ecuația lui Pell*.

Pe cînd prietenul meu vorbea despre ecuația lui Pell, prin fața cerdacului nostru a trecut o pereche de tineri, cu hainele de ploaie lipite de ei. Ploaia se domolise și ei mergeau fredonînd. Auzind însă numele de Pell, tînărul a izbucnit în rîs, oprindu-se curios în fața geamului deschis. Întorcîndu-se către partenera sa, i-a spus jucăuș:

— Uite Pell și nu e Pell! Apoi ni s-a adresat nouă: Să nu vă supărați că am rîs, dar îmi pare foarte caraghios că nu mai scăp de acest *domn Pell* nici aici, în mijlocul pădurii!

Ne-am uitat curios la el, iar prietenul meu i-a răspuns:

— Poate faceți vreo confuzie, căci acest domn Pell, de care ați auzit adineauri, nu mai este de mult printre noi!

— Nu, domnilor, nu fac nici o confuzie și vă rog să mă iertați dacă v-am părut necuviincios! Dar e o coincidență așa de nostimă, că, drept să vă spun, n-am s-o uit niciodată.

Mă refer la matematicianul englez de la începutul veacului al XVII-lea, al cărui nume latinizat era John Pellius. La acel domn Pell, care, pe lîngă că era un bun matematician, era și un mare savant și lingvist, dar se lăsa înșelat și furat de toți din jurul lui, încît de multe ori nu avea nici cu ce să-și cumpere cerneală și hîrtie și a murit într-o cumplită sărăcie! Sînt sigur că despre el vorbeați și dumneavoastră, nu-i așa?

— Adevărat, despre el vorbeam, a răspuns prietenul meu, din ce în ce mai mirat. Însă dacă-i vorba de el, îmi pare neînțeleasă și poate nelalocul ei expresia dv. „uite Pell și nu e Pell!"

— Se poate, dar aceasta-i o glumă a noastră, care vă asigur că nu are nimic necuviincios în ea..., așa o tachinez eu pe nevasta mea, care-i matematiciană, cum bănuiesc că sînteți și d-voastră!

— Dacă-i așa, a răspuns gazda, dacă sînteți prietenii domnului Pell, atunci vă rog să poftiți mai aproape, fiindcă prietenii prietenilor noștri sînt și prietenii noștri! Poftim să bem o cafea împreună, pînă ce se vor mai usca și hainele dv., căci, după cum văd, nu vă temeți de ploaie! Mă bucură că sîntem din aceeași breaslă!

— Numai pe jumătate, domnule, și nu-s eu cel cu pricina, ci nevastă-mea, a răspuns rîzînd tînărul, în timp ce au intrat amîndoi în casă și ni s-au prezentat. Nevastă-mea a absolvit vara aceasta Facultatea de matematică, pe cînd eu sînt de vreo doi ani asistent la istorie. Dar, drept să vă spun, această întîmplare e chiar extraordinară! Prin martie — căci noi ne-am căsătorit iarna aceasta — ea a prezentat la sesiunea științifică a studenților o lucrare în care era vorba tocmai de ecuația lui Pell. Așa că vă închipuiți, cred, de cîte ori mi-a fost dat să aud în casa mea de Pell! Și cîte am mai avut de îndurat din cauza lui! Nici tu mîncare, nici tu un teatru; la ordinea zilei era numai și numai domnul Pell!

— După cîte înțeleg, am adăugat eu adresîndu-mă tinerei, care părea intimidată, soțului dv. îi cam place să vă necăjească, nu-i așa?

— O, da! Însă relativ la gluma lui cu „uite Pell și nu e Pell", ea are un tîlc. Mă necăjește așa de cînd i-am spus că

această ecuație poartă numele unui matematician care nu s-a ocupat niciodată cu ea! De atunci...

— Bine, dar n-am dreptate? a întrebat-o soțul ei, plin de vervă. Cît de naivi sîntem noi, *nematematicienii*, cînd luăm de bune cele ce afirmați voi, *matematicienii!* Iată cea mai bună dovadă că nu sînteți infailibili.

— De cîte ori ți-am spus, a protestat tînăra, că aici nu-i vorba de o demonstrație, ci numai de o documentare greșită din punct de vedere istoric.

— Nu știu despre ce fel de greșeală e vorba, a spus prietenul meu, și, dacă există vreo anecdotă cu privire la ecuația lui Pell, mi-ar face plăcere să o aflu și eu. Noi vorbeam despre ecuația lui Pell întîmplător; ajunsesem la această ecuație pornind de la o altă problemă.

— Totul e foarte simplu, a început tînăra cu vădită plăcere. Pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, marele matematician Euler, cercetînd această ecuație, a numit-o probabil din eroare ecuația lui Pell, căci Pell nu a publicat nimic în legătură cu ea. Dar o dată ce Euler a numit-o *ecuația lui Pell*, nimeni nu a mai pus la îndoială veridicitatea informației lui și toți au numit-o așa. Iar astăzi, deși se cunoaște adevărul și matematicienii propun chiar să i se schimbe numele, din obișnuință i se spune tot *ecuația lui Pell!*

— Mulțumesc pentru informație, a zîmbit prietenul meu, curtenitor. Acum înțeleg tîlcul vorbelor de mai înainte, domnule! Se vede că și istoria matematicilor are un călcîi vulnerabil, dar, fiind vorba de Euler, *genialul matematician* orb, greșeala e scuzabilă. Să nu uitați că Euler și-a petrecut ultimii 17 ani din viață fără să vadă de loc și că mai înainte de a orbi complet, a îndurat multe din cauza vederii. Iar dacă informațiile lui istorice au suferit din această cauză, infirmitatea nu l-a împiedicat să-și continue cercetările matematice cu o amploare și ușurință care a uimit pe contemporanii săi.

— Aveți dreptate, a aprobat noua noastră cunoștință. Contemporanii îl numeau „analistul încarnat", iar Arago a spus că Euler calcula fără nici un fel de sforțare, tot așa de natural cum plutesc vulturii în înălțimi sau cum respiră oamenii! Cît despre ecuația pe care văd că dv. ați scris-o

sub forma $cv^2+1=u^2$, ca a fost cunoscută încă din antichitate. Desigur că nu în forma ei generală, dar sub diferite forme particulare. O găsim, de pildă, în cartea lui Diofant...

— Ce șansă, domnule, ce șansă, a întrerupt-o soțul ei, cu fața plină de zîmbet! Formidabil. Să cunoști numai o singură chestiune din toată matematica și tocmai despre ea să ai ocazia să vorbești! Așa întîmplare nici la o mie de ani o dată nu se mai întîmplă! Nu găsiți și dv. că e formidabil, domnilor?

— Mi se pare că sînteți cam gelos, l-am apostrofat eu, continuîndu-i jocul.

— Da, da, asta-i așa, a mărturisit cu grabă și tovarășa lui de viață, roșind de plăcere.

— Dacă sînt atacat din toate părțile, mă dau bătut! Admit să ascult a 1001-a oară această poveste!

— Atunci, vă rugăm foarte mult, doamnă, să ne spuneți povestea acestei ecuații pînă la capăt.

— Vorbeam de Diofant. Nu se poate preciza în ce epocă a trăit, însă, după cum arată renumitul cercetător al istoriei matematicilor, Paul Tannery, se pare că prin a doua jumătate a secolului al III-lea e.n. În cele șase cărți de aritmetică rămase de la el se găsesc și probleme care conduc la ecuații nedeterminate de gradul al doilea, ca, de pildă, „să se construiască un triunghi dreptunghic în numere", adică să se rezolve în numere întregi ecuația $x^2+y^2=a^2$.

— Bine, dar aceasta-i teorema lui Pitagora!

— Da, și e foarte probabil că și pitagoricienii și-au propus să rezolve asemenea ecuații. Se știe că Platon cunoștea soluțiile în numere întregi ale ecuațiilor $2x^2-4^2=\pm 1$. Se pare că și Arhimede ar fi rezolvat în numere întregi ecuațiile $3x^2-y^2=-1$ și $3x^2-y^2=2$.

Ecuația aceasta a preocupat și pe matematicienii hinduși. O găsim în cartea scrisă de Brahmagupta în secolul al VII-lea, de data aceasta nu numai prin exemple particulare, ci chiar sub forma ei generală. Brahmagupta încearcă să găsească o metodă de a o rezolva. În acest scop, el stabilește că pentru a afla soluțiile, în numere întregi, ale unei ecuații de forma

$$cv^2 + 1 = u^2, \tag{3}$$

unde c nu este un pătrat, trebuie folosită o ecuație ajutătoare de forma

(4) $$ca^2 + k = b^2,$$

unde a și b sînt numere întregi pozitive, iar k — pe care-l numește *interpolator* — trebuie să aibă una dintre valorile: ± 1, ± 2 sau ± 4. Din această ecuație, Brahmagupta deduce apoi ecuația (3), folosindu-se de o lemă, pe care o demonstrează și îi dă numele de „principiul compunerii egalilor". Lema, redescoperită de Euler și apoi de Lagrange, se enunță astfel: „Dacă avem ecuația $ca^2 + k = b^2$, în numere întregi, atunci există și ecuația

(5) $$c(2ab)^2 + k^2 = (b^2 + ca^2)^2 \quad (k \neq 1).$$

E ușor de observat că ecuația (5) se reduce la ecuația lui Pell, dacă o simplificăm cu $k = \pm 2$ sau cu $k = \pm 4$. Dacă se poate stabili ecuația ajutătoare (4), prin ca se pun în evidență soluțiile, în numere întregi, ale ecuației (3), aplicîndu-se principiului lui Brahmagupta. Dar Brahmagupta nu a dat o metodă generală de formare a ecuației (4), ci a arătat numai unele metode empirice, stabilite prin încercări de la caz la caz.

De aceea în veacul al XI-lea, Bhaskara II a reușit să stabilească o metodă simplă și elegantă pentru a forma ecuația, care are ca interpolator ± 1, ± 2 sau ± 4. Pentru aceasta, el s-a servit de o altă ecuație ajutătoare, formată tot în mod empiric, dar ușor de stabilit, oricare ar fi ecuația dată. Bhaskara II a numit procedeul său *metoda ciclică*, arătînd prin aceasta că operațiile care se efectuează pentru a ajunge la rezultat *se repetă în mod continuu, ca într-un ciclu*. El stabilește următoarea lemă:

„Dîndu-se ecuația

(4) $$ca^2 + k = b^2,$$

unde a, b și k sînt întregi, pozitivi sau negativi, există egalitatea:

(6) $$c\left(\frac{am + b}{k}\right)^2 + \frac{m^2 - c}{k} = \left(\frac{bm + ca}{k}\right)^2,$$

unde m este un număr întreg arbitrar, care se alege în așa fel încît $\frac{am+b}{k}$ să fie un număr întreg și (m^2-c) să aibă cea mai mică valoare posibilă. După cum vedeți, ca formă, relația (6) nu diferă de (4), însă are avantajul că $\frac{m^2-c}{k}$ este un număr întreg mai mic decît k și deci, prin aplicarea repetată a formulei (6) la ecuațiile stabilite în mod succesiv, se va ajunge la o ecuație în care interpolatorul k va avea una dintre valorile: ± 1, ± 2 sau ± 4. Acesteia i se aplică apoi lema lui Brahmagupta, și astfel se stabilesc rădăcinile ecuației (3).

Dacă vreți, vă pot arăta și un exemplu care se găsește chiar în cartea lui Bhaskara și pe care-l țin foarte bine minte, fiindcă mi-a plăcut forma poetică în care e formulată problema...

— Băgați de seamă, domnilor! a întrerupt iar tînărul, cu o prefăcută seriozitate. Nu se lasă pînă nu vă va spune tot ce știe. De-abia cînd vă veți pierde răbdarea îmi veți da dreptate!

— Ba de loc, prietene. Lăsați-o în pace! Auzim lucruri extrem de interesante!

— Pentru dv. ca matematicieni or fi fiind așa, dar nu vă gîndiți și la mine?

— Ba să avem iertare, i-am replicat îndată. Află că și eu sînt istoric, ca și dumneata, iar prietenul acesta al meu mă ține în cange de la răsăritul soarelui!

— Dacă-i așa, continuă, scumpă soțioară, continuă, dar teme-te de Indra[1].

— Cu voia ori fără voia ta, am să citez problema din cartea lui Bhaskara. Ea e formulată astfel: „Spune-mi, prietene, dacă metoda prefacerii pătratului a cuprins mintea ta așa de complet cum cuprinde planta agățătoare un copac, care este pătratul care, fiind înmulțit cu 67 și adăugîndu-i-se unitatea la produs, dă un pătrat?“ De fapt, în cartea lui

[1] Indra, zeița hindusă cu 4 mîini, este considerată ca una dintre divinitățile cele mai temute.

Bhaskara sînt propuse două ecuații, dar eu v-am citat una singură. Din problemă rezultă $67\,x^2 + 1 = y^2$.

— Atunci să formăm și ecuația ajutătoare. Cred că, urmînd indicațiile care ni le-ați dat, putem pune $x = 1 = a$ și să căutăm pentru b un număr al cărui pătrat să fie foarte apropiat de 67. Asta înseamnă 8. Rezultă deci egalitatea

$$67.1^2 - 3 = 8^2 \tag{7}$$

După notațiile din (4) avem:

$$a = 1,\ b = 8,\ c = 67 \text{ și } k = -3$$

Aplicăm lema lui Bhaskara:

$$67\left(\frac{1\cdot m + 8}{-3}\right)^2 + \frac{m^2 - 67}{-3} = \left(\frac{8m + 67\cdot 1}{-3}\right)^2 \tag{8}$$

Valoarea lui m trebuie aleasă în așa fel, încît $\frac{m+8}{-3}$ să fie un întreg, iar m^2-67 să fie un număr cît mai mic posibil.

— Da. Prima condiție e îndeplinită pentru toate valorile lui m de forma: $m = -3t + 1$, t fiind un număr întreg oarecare, căci, în acest caz, avem:

$$\frac{-3t + 9}{-3} = t - 3$$

Pentru a doua condiție putem alege $t=-2$. Rezultă atunci $m=7$. Înlocuind deci în (8) pe m prin 7 se obține egalitatea

$$67.5^2 + 6 = 41^2 \tag{9}$$

— Acum să aplicăm și egalității (9) lema de mai sus, nu-i așa?

— Desigur, aplicăm în continuare metoda ciclică sau a prefacerii pătratului. De data aceasta, $a = 5$, $b = 41$ și $k = 6$. Avem

$$67\left(\frac{5n + 41}{6}\right)^2 + \frac{n^2 - 67}{6} = \left(\frac{41n + 67\cdot 5}{6}\right)^2, \tag{10}$$

unde $\frac{5n+41}{6}$ trebuie să fie un număr întreg. Pentru aceasta putem spune $n = 6t + 5$.

Avem atunci:

$$\frac{30t + 66}{6} = 5t + 11 \text{ și } \frac{n^2 - 67}{6} = \frac{36t^2 + 60t - 42}{6}$$

Cea mai mică valoare a fracției se obține pentru $t = 0$, ceea ce conduce la $n = 5$.

În acest caz, ecuația (10) se scrie astfel:

$$(11) \qquad 67 \cdot 11^2 - 7 = 90^2$$

— Și acum ce mai facem?

— Aplicăm iar metoda ciclică, adică din (11) deducem noua ecuație, căreia îi vom zice a 12-a:

$$(12) \qquad 67\left(\frac{11p + 90}{-7}\right)^2 + \frac{p^2 - 67}{-7} = \left(\frac{90p + 67 \cdot 11}{-7}\right)^2$$

— Condițiile le știm: $\frac{11p + 90}{7}$ să fie întreg, așadar $p = -7t + 2$ și $\frac{p^2 - 67}{-7}$ sau $\frac{49t^2 - 28t - 63}{-7}$ să fie cel mai mic întreg. De aici rezultă $t = -1$. Înlocuind această valoare a lui t în formula care ne dă p, avem $p = 9$, iar (12) devine:

$$-67.27^2 - 2 = 221$$

— În fine, iată că am ajuns să avem ca interpolator pe —2! Am isprăvit cu metoda ciclică. Folosim acum lema lui Brahmagupta, nu-i așa?

— Desigur, avem $c = 67$, $a = 27$ și $b = 221$. Înlocuind în (5) obținem:

$$67 \cdot (2 \cdot 27 \cdot 221)^2 + 4 = (221^2 + 67 \cdot 27^2)^2 \text{ sau}$$

$$67 \cdot (2 \cdot 5967)^2 + 4 = 97684^2 \text{ și, împărțind cu 4:}$$

$$67 \cdot (5967)^2 + 1 = (48842)^2.$$

Ultima egalitate conține soluția ecuației. Ea ne arată că $x = 5967$ și $y = 48842$.

— E foarte ingenioasă metoda și vă mulțumim pentru ajutorul dv. Dar cînd au cunoscut europenii aceste cercetări

ale matematicienilor hinduși? Îmi închipui că destul de tîrziu?

— De-abia în veacul al XIX-lea, cînd aceste lucrări au fost traduse din limba sanscrită în limba engleză și mult după ce europenii descoperiseră, pe altă cale, o metodă destul de asemănătoare.

— Interesantă povestea aceasta a redescoperirilor unui același adevăr de oameni din țări și timpuri diferite, cu mentalități și puncte de vedere diferite..., a murmurat prietenul meu ca pentru sine. Crezi că tu ai descoperit ceva pentru prima oară și, cînd colo, altundeva, departe în timp și spațiu, altcineva a gîndit ca și tine la aceeași problemă, și a tresărit cu aceeași emoție ca a ta cînd a întrezărit soluția! În istoria matematicilor se cunosc destule cazuri. Putem aminti, de pildă, calculul integral, fundamentat de Newton și Leibniz în secolul al XVII-lea și totodată de Arhimede, prin secolul al III-lea î.e.n.

— Iar în ce privește rezolvarea acestei ecuații, de către europeni, a replicat matematiciana, povestea are un început... cum să vă spun? aventuros, cu provocări, cu un fel de dueluri matematice.

— Atunci totul devine pasionant, intervin eu, și vă rugăm...

— Vă rog, vă rog, n-o mai rugați nimic, am și eu un cuvînt de spus. Hai, nevastă, la căsile noastre, că-i tîrziu!

— Da, ai dreptate, trebuie să ne ducem la gospodăria noastră! Să nu crezi că am uitat că-s și gospodină!

— Dacă spuneți așa, nu mai insistăm, însă vă rugăm să ne promiteți că mai veniți să ne mai dați o mînă de ajutor, a spus prietenul meu.

— Cu mare plăcere, numai că, după cum v-a spus soțul meu, eu nu știu prea multe și ce am avut de spus, v-am cam spus!

— Cum se poate asta? s-a mirat prietenul meu. A rămas doar chestia duelului și apoi tare aș mai vrea să vă cooptăm la problema noastră, adică mai bine zis a taurilor Soarelui...

— Cum ați spus? Taurii Soarelui? a întrebat, izbucnind într-un rîs copilăresc matematiciana. Dar n-am auzit de o asemenea problemă și nici că mîndrul Soare ar fi fost proprietar de vite!

— Ei, acum îmi dați dreptate, domnilor? a intervenit soțul sarcastic. Nu știe nimic în afară de Pell, Pell și iar Pell. Habar nu are de mitologia greacă! Credeți că și-a bătut capul cu *Odiseea*? Nu știe despre ea altceva, decît că a scris-o Homer!

— Atunci îți dai tu singur un vot de blam. Cînd ne-am cunoscut m-am îndrăgostit de tine fiindcă vorbeai cu atîta căldură despre *Iliada* și *Odiseea*, încît m-am simțit lîngă tine tot așa de fericită ca atunci cînd eram mică și bunelul meu îmi spunea povești. Cu această încredere sufletească m-am apropiat eu, atunci, de tine și tu? Tu ai fost în stare să uiți clipele acelea cum ai uitat să-mi pomenești vreodată și despre taurii Soarelui! De ce nu mi-ai vorbit și despre ei?

— Mă dau bătut, a răspuns ispășit cel apostrofat. Ca să ne împăcăm îți voi spune pe drum tot cîntul al XII-lea. De altfel și Euripide amintește despre ei în *Troienile*, ori matale mi-ai spus azi dimineață că ai terminat-o de citit aseară. Cum se face că nu i-ai găsit acolo? a întors răspunsul tînărul, triumfător.

— Ai dreptate, m-am amestecat eu, de asta am uitat! Mi se pare că aceea care amintește despre ei este Casandra, cînd e luată ca roabă de Ulise, nu?

— Da, am recitit tragedia zilele acestea, așa că vă pot spune exact cum. Aflînd că va fi roaba lui Ulise, la despărțire de mama ei Hecuba, Casandra o încurajează, prorocind nenorocirile care se vor abate pe capul lui Ulise:

„Și va cunoaște naufragii
Pe marea cea sărată, va cunoaște
Al lotusului dor, și boii sacri
Ai Soarelui, care în carnea lor
Vor prinde grai și-i vor trimite-amare
Voci lui Ulyse..."

În timp ce tînărul recita cu avînt aceste versuri, mă uitam la prietenul meu. Peste durerea care de un timp încoace îi modelase chipul se așternuse un zîmbet de caldă încîntare. Cu sinceritatea și vioiciunea lor, tinerii aceștia ne-au cuprins în vraja farmecului lor și amîndoi am insistat să ne viziteze iar:

Fig. 4
Pierre de Fermat

— Așadar, dacă plouă și mîine, contabilizăm împreună cirezile lui Helios?

— Dacă-i vorba să mai rătăcim și prin cîmpiile Siciliei, unde-și ținea Helios turmele, mă prind și eu bucuros la taifas, a spus tînărul înainte de despărțire, adăugînd: Oricum, mîine dimineață va fi umed prin pădure, iar dacă înspre amiază se va lumina, vă vom ruga noi pe dv. să ne țineți tovărășie pe drumul Măgurii, ca să dăm bună ziua Rarăului!

A doua zi dimineața cerul rămăsese închis. Noi n-am mai continuat problema, așteptînd venirea tinerilor noștri prieteni. De altfel n-au întîrziat mult și, după ce am golit cu toții cești le cu cafea puse înaintea noastră, a venit la rînd ecuația lui Pell.

— Știți, a început prietena noastră, în Europa problemele din teoria numerelor au căpătat o largă dezvoltare pe la începutul veacului al XVII-lea, datorită genialului matematician francez Fermat.

— De fapt, Fermat era un diletant în matematici, de profesiune fiind judecător în Toulouse. Și, ca să fac plăcere celor

doi domni nematematicieni din preajma mea, a adăugat şăgalnic prietenul meu, el era şi un erudit lingvist!

— Iar pe Homer îl cunoştea tot aşa de bine ca şi soţul meu... De altfel a compus şi versuri, nu numai în limba lui natală, ci şi în latineşte şi în limba spaniolă, pe atunci foarte la modă în Franţa. Dar Fermat era un om modest, ca dovadă că nu a publicat şi nici nu a pregătit pentru publicare vreuna din genialele lui descoperiri matematice. O parte din ele au fost cunoscute din corespondenţa pe care a purtat-o cu unii dintre matematicienii de atunci, cealaltă parte însă a fost găsită abia după moarte, de fiul său, Samuel. Fermat moare în 1665. Peste 4 ani apare volumul intitulat *Varia Opera*, tipărit de fiul lui (fig. 5). În anul următor, tot Samuel de Fermat publică o nouă ediţie a cărţilor lui Diofant...

— Dacă nu mă înşel, a întrerupt-o prietenul meu, prima ediţie a lui Diofant e publicată de către Bachet de Mézirac în 1621, textul fiind tipărit atît în limba greacă, cît şi în traducerea latinească. Ştiu că Fermat citea cu pasiune această carte şi a notat pe marginea filelor ei multe dintre frumoasele lui teoreme, printre care şi teorema celebră, rămasă nedemonstrată pînă azi.

— Mi se pare că acum s-a demonstrat şi această faimoasă teoremă. Nu ştiu precis, fiindcă lucrarea n-a apărut încă, dar am auzit vorbindu-se despre acest eveniment la noi, la Seminarul matematic din Iaşi!

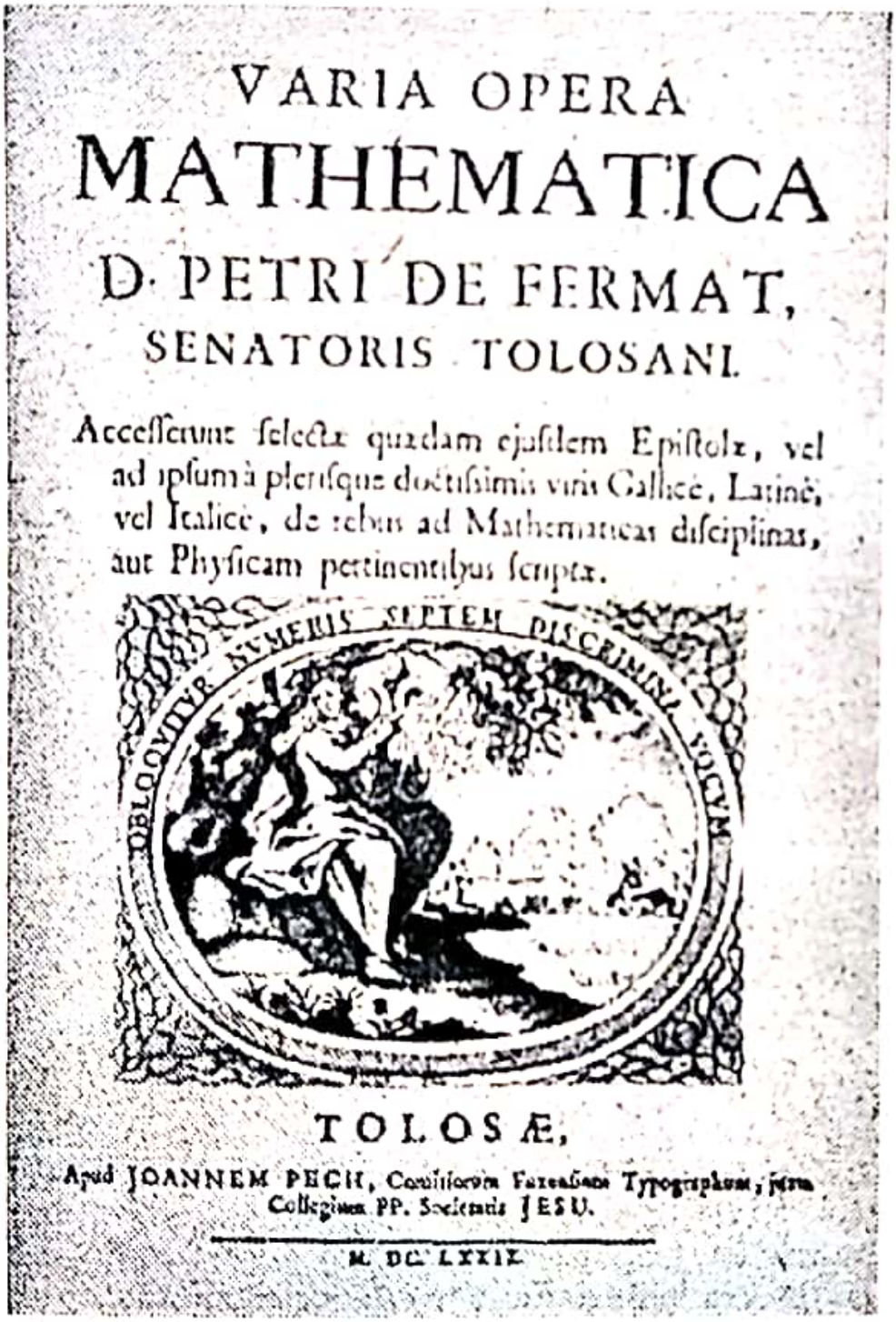
— Da? De către cine a fost demonstrată?

— Tot de către un matematician francez, dar fiindcă nu cunosc alte amănunte, prefer să ne întoarcem la problema noastră. Samuel de Fermat publică, la începutul cărţii lui Diofant, teoremele stabilite de tatăl său, anume tocmai acelea găsite pe marginea cărţii de care vorbeaţi dv., precum şi altele, aflate în scrisorile adresate unui prieten.

— Ştiu că moda scrisorilor cu conţinut matematic, filozofic sau literar era în toi prin veacurile al XVII-lea şi al XVIII-lea. Cu toate că, formal, erau personale, acele scrisori treceau din mînă în mînă, erau copiate, comentate şi chiar trimise altor specialişti, care se ocupau de probleme înrudite, a adăugat tînărul. Vreau să spun că, deşi personale,

scrisorile acelea aveau un caracter public și multe dintre ele, ale căror originale s-au pierdut, se cunosc azi numai fiindcă s-au păstrat prin asemenea copii.

— Așa e cazul și cu scrisoarea pe care Fermat a adresat-o lui Frénicle de Bessy, în care vorbește de ecuația pe care am numit-o ieri a lui Pell, a reluat voioasă vorbitoarea. Lui Bernard Frénicle de Bessy, consilier la Curtea Monetă-


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Acceſſerunt ſelectæ quædam ejuſdem Epiſtolæ, vel ad ipſum à pleriſque doctiſſimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas diſciplinas, aut Phyſicam pertinentibus ſcriptæ.

OBLOQUITUR NUMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCUM

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Conſiſtorii Parlamenti Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Fig. 5

rici, îi plăcea să-și petreacă timpul liber rezolvînd probleme din teoria numerelor. El purta o corespondență susținută cu Fermat și, ca matematician, era apreciat nu numai de Fermat, ci și de mulți alți matematicieni. Fermat i-a trimis această scrisoare lui Frénicle în februarie 1657. Ea a fost îndată copiată de un alt dezlegător pasionat de probleme din teoria numerelor, Claude Mylon, jurisconsult la Paris. Acesta, la rîndul lui, fiind în corespondență cu marele matematician Chr. Huygens, îi trimite în 2 martie și lui problema propusă de Fermat, iar la rîndul lui Huygens o trimite, în 9 martie, profesorului său Schooten. Azi scrisoarea lui Fermat se cunoaște datorită *acestei ultime copii*. Mi-am adus cu mine notele lucrării despre care a avut grijă soțul meu să vă informeze, ca să o redactez, fiindcă în toamnă va trebui să o public, așa că am să vă citesc copia acelei scrisori:

„Orice număr care nu-i un pătrat are proprietatea că se pot găsi o infinitate de pătrate prin care, înmulțind numărul dat și adăugînd 1 la produs, să se obție un pătrat. De exemplu: 3 nu-i un pătrat, înmulțit cu 1, care e pătrat, fac 3 și, adăugîndu-i-se 1, face patru, care este un pătrat. La fel 3×16, care e pătrat, fac $48 + 1 = 49 = 7^2$. Există infinite numere cu care înmulțind pe 3 și adăugîndu-i 1 fac un pătrat. Vă cer o regulă generală care să stabilească, fiind dat un număr care nu-i pătrat, cum se găsesc pătratele care, înmulțite cu numărul considerat și adăugînd unitatea, să formeze numere pătrate. Care este, de exemplu, cel mai mic pătrat cu care, înmulțind pe 61 și adăugîndu-i unitatea, să formeze un pătrat? La fel, care este cel mai mic pătrat cu care, înmulțind pe 109 și luînd unitatea, să facă un pătrat?

Dacă nu-mi trimiteți soluția generală, trimiteți-mi-o în particular, pentru aceste două numere, pe care le-am ales printre cele mai mici, ca să nu vă dea prea multă osteneală. După ce voi primi răspunsul dv., vă voi propune altceva. Pare, fără a vă spune, că propoziția mea e numai pentru numere întregi care să satisfacă problema, căci, în cazul celor fracționare, cel mai slab aritmetician ajunge la capăt".

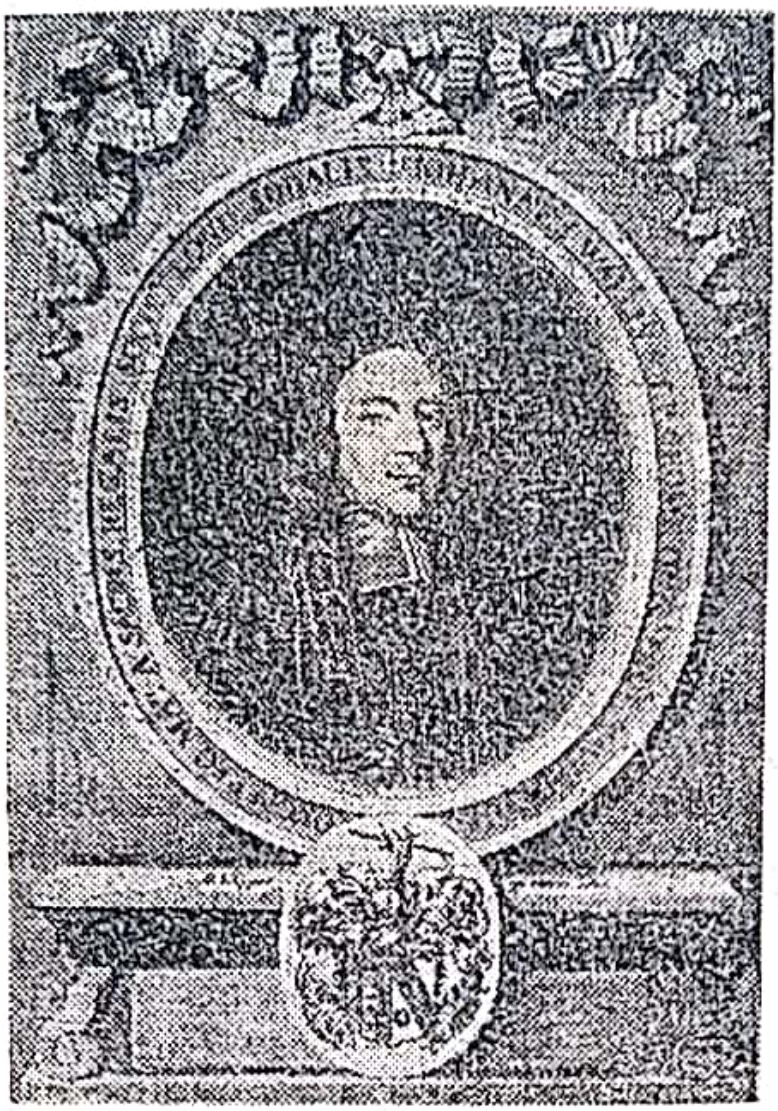


Fig. 6
John Wallis

— Dar e vorba chiar de o ecuație la fel cu aceea pe care am discutat-o! Așadar, Fermat este acela care propune pentru prima oară în Europa rezolvarea acestui gen de ecuații? Drept ar fi fost ca ecuația aceasta să poarte numele lui Fermat!

— Desigur, și propunerea este formulată în multe cărți, deși chiar acei autori care fac propunerea continuă să-i zică tot ca mai înainte!

— Totuși, mi se pare destul de curioasă această confuzie a lui Euler, ținînd seama că Fermat era francez, pe cînd Pell era englez!

— Nu-i chiar așa. În această istorie sînt amestecați și englezi! Fermat, care nu a avut răbdare să aștepte răspunsul lui Frénicle, a trimis aceeași problemă, imediat după aceea, sub forma unei provocări, și la doi dintre cei mai renumiți

matematicieni englezi: John Wallis și lord W. Brouncker. Această problemă reprezenta, de fapt, a doua provocare din partea lui Fermat. Prima o trimisese cu vreo 2 luni înainte, ca urmare la un schimb de păreri în legătură cu cartea pe care o publicase John Wallis în 1655: *Arithmetica Infinitorum*. Fermat căpătase cartea în vara anului 1656 de la Kenelm Digby — cu care era probabil prieten — cînd acesta venise la Toulouse. Citind-o, el observă că unele dintre rezultatele expuse de Wallis fuseseră stabilite mai înainte de către Torricelli, și îi scrie lui Digby, care, la rîndul său, le comunică lui Wallis.

— Și acestuia numai plăcere nu a putut să-i facă!

— Întocmai. De altfel și provocarea nu e trimisă direct lui Wallis, ci tot prin intermediul lui Digby. Am să vă citesc o parte din această scrisoare a lui Fermat, fiindcă știu bine că vă va interesa.

„Rar se propun chestiuni aritmetice și puțini știu să le rezolve. Oare din cauză că aritmetica a fost tratată pînă în prezent mai mult cu ajutorul geometriei decît prin ea însăși? E tendința care apare în cele mai multe lucrări, atît vechi, cît și moderne și chiar în Diofant... Totuși, aritmetica are un domeniu care îi e propriu, teoria numerelor întregi: această teorie a fost ușor schițată de Euclid și nu a fost îndeajuns cultivată de succesorii lui (decît dacă lucrările n-au fost incluse în cărțile lui Diofant care s-au pierdut). Aritmeticienii au deci sarcina să o dezvolte sau să o reînnoiască. Ca să le luminez calea, le propun să demonstreze ca teoremă sau să rezolve ca problemă următorul enunț: dacă vor ajunge, vor recunoaște cel puțin că probleme de acest fel nu sînt inferioare nici ca subtilitate, nici ca dificultate, nici ca mod de demonstrare celor mai celebre din geometrie."

După această introducere, urmează problema pe care v-am citit-o.

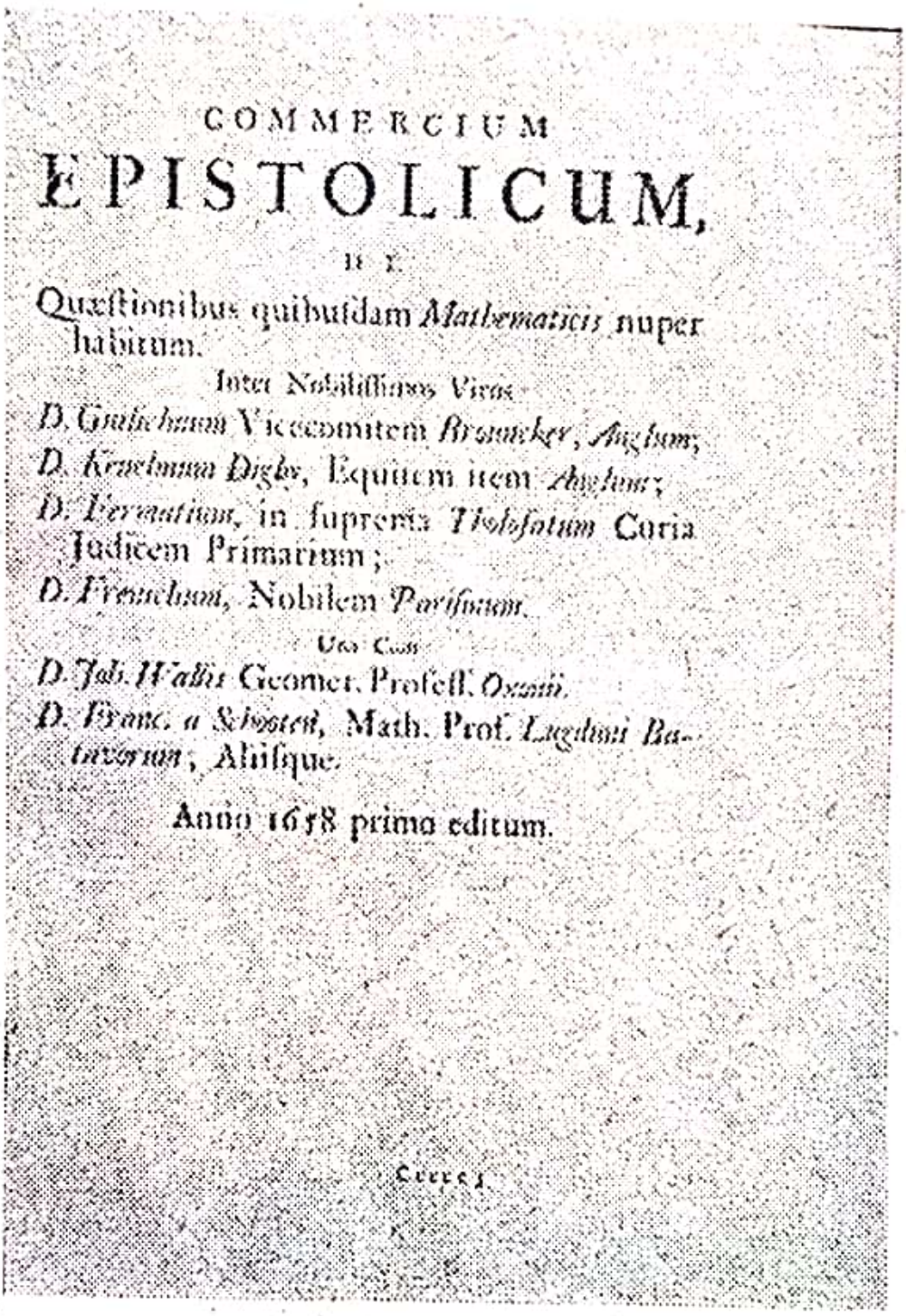
— Într-adevăr, e interesantă această introducere, în care vibrează pasiunea lui Fermat pentru teoria numerelor!

— Și, ca să vedeți cît interes prezentau atunci aceste scrisori, am să vă mai spun, cu titlul de curiozitate, că lordul E. Brouncker, care primește scrisoarea la Londra în 14 martie, o trimite chiar a doua zi la Oxford, lui Wallis. Amîndoi

rezolvă problema, precum și celelalte care le fuseseră trimise mai înainte, dar trimit răspunsul în englezește, și nu în latinește, cum aștepta Fermat, care nu cunoaștea limba engleză! El a găsit un englez, venit atunci la Toulouse, care știa franțuzește, dar habar n-avea de matematici, așa că din traducerea acestuia Fermat nu și-a putut da seama dacă Wallis și Brouncker au găsit sau nu metoda cerută. În 15 august 1657, Fermat îi scrie lui Digby, arătîndu-și nemulțumirea: „În legătură cu problema despre numere, îndrăznesc să vă zic, cu respect și fără să reduc nimic din înalta părere pe care o am despre națiunea dv., că cele două scrisori ale Mylordului Brouncker, deși obscure și rău traduse, nu conțin, după părerea mea, nici o soluție. Nu înseamnă că eu aș vrea să reîncep luptele și vechile lovituri de lance pe care le-au dat altă dată englezii francezilor, dar, fără să ieșim din metaforă, îndrăznesc să susțin în fața voastră, domnule, care excelați mai mult ca alții în ambele meșteșuguri, că hazardul și fericirea se amestecă uneori în luptele științifice, tot așa ca și în altele..."

— Am citit undeva, a întrerupt prietenul meu, că Descartes ar fi spus despre Fermat, cu care a avut și el de luptat: „Dl. Fermat este gascon, eu nu!" Mi se pare mie că avea dreptate.

— Știu eu? Istoricii îl consideră pe Fermat drept un om pașnic. Dar e greu de știut ce zace în sufletul omului! Acest duel franco-englez s-a soldat prin împăcare și recunoașterea reciprocă a meritelor acestor mari matematicieni! Se pot citi toate fazele acestei lupte în colecția de scrisori, publicată un an mai tîrziu în 1658, de către Wallis, intitulată *Commercium Epistolicum* și avînd ca subtitlu: *Corespondență recent schimbată asupra unor chestiuni matematice între prea nobilii: Lord William Vicomte Brouncker, englez, Sir Kenelm Digby, cavaler englez, domnul Fermat, consilier în Parlamentul din Toulouse, dl. Frénicle, gentilom din Paris, și: Sir John Wallis, profesor de geometrie la Oxford, dl. Frans von Schooten, profesor de matematică la Leyda și alții.* Aceste scrisori, care încep cu provocarea d-lui Fermat față de dl. Wallis, sînt dedicate: *Prea ilustrului și prea nobilului Sir Kenelm Digby, cavaler în Anglia prin intermediul căruia a*



COMMERCIUM

EPISTOLICUM,

DE

Quæſtionibus quibuſdam *Mathematicis* nuper habitum.

Inter Nobiliſſimos Viros

D. Guilielmum Vicecomitem *Brouncker*, *Anglum*;

D. Kenelmum Digby, Equitem item *Anglum*;

D. Fermatium, in ſuprema *Tholoſatum* Curia Judicem Primarium;

D. Frenicleum, Nobilem *Pariſinum*.

Una Cum

D. Joh. Wallis Geomet. Profeſſ. *Oxonii*.

D. Franc. a Schooten, Math. Prof. *Lugduni Batavorum*, Aliſque.

Anno 1658 prima editum.

Fig. 7

fost purtată această corespondență matematică între anii 1656 și 1658.

— Acum apare clar și cauza greșelii lui Euler, a remarcat tînărul, care ascultase cu interes scrisorile citite de soția sa. Foarte probabil că Euler cunoștea ceva în legătură cu aceste scrisori și le-a atribuit lui Pell!

— Vezi, s-a adresat apoi soției sale, acum aș putea să te acuz și eu pe tine, cum m-ai acuzat și tu cu *Odiseea*, că nu

mi-ai spus niciodată nimic despre aceste scrisori! Cred că ar fi cazul să mă supăr că ai lăsat să plutească în mister această ecuație a lui Pell!

— Nu-i caz de supărare, a intervenit prietenul meu. Această ecuație a fost un episod care ne-a purtat mult noroc. Prin ea v-am făcut cunoștință.

— Deși mă asociez la părerea prietenului meu, aș vrea să-i atrag atenția tînărului meu coleg asupra pericolului acestei mărturisiri. Ciocolata care în dimineața aceasta și-a făcut loc pe masa noastră și care n-am văzut-o niciodată pînă acum este încă o dovadă că gazda are intenția să fure locul blîndului domn Pell!

— Asta-i răsplata că ți-am ajutat să rezolvi sistemul celor 9 ecuații nedeterminate?

— Care? Acelea ce au rezultat din problema taurilor Soarelui? a intervenit cu cochetărie eroina discuției. Sînt curioasă să cunosc această problemă și vă rog să mi-o spuneți.

— Foarte bucuroși de propunere. Dar ca să nu dau loc la bănuieli și totodată ca să văd ce a înțeles din explicația mea acest neprețuit prieten, îl rog să v-o explice chiar el. Cred că astfel îl vom atrage în discuție și pe soțul dv., care ne-a dovedit că-i îndrăgostit de chestiunile legate de antichitate.

Nu mi-a fost greu să prezint problema și să ajung la primul grup al celor 7 ecuații. Explicațiile mele s-au adresat mai mult noului prieten, căci tovarășa lui nu avea nevoie de ele. Din contra, ea a fost aceea care m-a ajutat și a condus mai departe discuțiile, după ce au intervenit ultimele două condiții din care rezultase ecuația cu pricina.

— Acum, a spus acesta, adresîndu-se soției lui, ar trebui să aplicăm metoda hindusă pe care ne-ai arătat-o tu ieri.

— Ba de loc! am spus eu. Renunț la calculul a cine știe cîte ecuații intemediare prin care ar trebui să aflăm interpolatorul cerut. Nu, nu! Am calculat eu destul pînă ați venit dumneavoastră!

Pe cînd protestam, prietenul meu a început să rîdă cu hohote. Ne-am uitat curioși și el ne-a spus:

— Nici nu se poate pune problema să facem aceste calcule, căci pentru asta ne-ar trebui o mașină de calculat și încă

una electronică! Aflați că cea mai mică soluție a problemei este formată din numere care au fiecare cîte 206 545 de cifre. Vă puteți imagina un asemenea număr? Uite, am aici o tablă de logaritmi. Are formatul obișnuit al unei cărți. Să numărăm cîte cifre cuprinde o pagină. Vedeți, sînt 2 500 de cifre. Să împărțim acum 206 545 la 2 500. Rezultă că sînt necesare vreo 83 de pagini ca să se scrie numai unul singur dintre numerele care arată cîte vite cornute de o singură culoare și gen avea Domnul Soare în Sicilia!

— Atunci, dacă înmulțim 83 cu 9, ca să vedem pe cîte pagini trebuie imprimate cele 8 numere care corespund fiecărui fel dintre cornute și totalului lor, rezultă că s-ar forma o carte de vreo 750 de pagini!

— Vedeți dar, a reluat prietenul meu, că în 1773, atunci cînd Lessing a propus această problemă rectorului Chr. Leiste, ca se prezenta destul de nebulos. Soluția ei completă depindea de o ecuație Pell-Fermat, care, deși pe atunci își aflase dezlegarea, metoda de rezolvare nu era încă pusă sub o formă ușor de înțeles și nici nu era tipărită într-o carte accesibilă.

— Dar ne-am luat cu vorba și am uitat să adaug, a intervenit tînăra matematiciană, că în cartea de algebră pe care Wallis o publică în anul 1685, la vreo 20 de ani după ce murise Fermat, el dă o demonstrație a faptului că ecuația $cv^2 + 1 = u^2$ se poate rezolva totdeauna prin numere întregi. Dar în această demonstrare el comite o eroare de raționament care a trecut nebăgată în seamă, însă a fost remarcată peste vreo 80 de ani de către doi mari matematicieni, unul francez, Lagrange, și celălalt german, Gauss, supranumit și *Princeps mathematicorum*.

Prin acești doi matematicieni ecuația apare din nou în scenă, și așa atrage ea atenția matematicianului Leonard Euler. El este acela care publică o metodă generală de rezolvare a ei și totodată îi dă numele cu bucluc. Lagrange reia atunci metoda propusă de Euler și își modifică cu ajutorul ei propria sa metodă. Astfel, ajunge la rezultate care amintesc pe acelea stabilite cu șase secole mai înainte de către hinduși. Aceste rezultate au fost expuse într-o formă deosebit de clară și de simplă de un alt matematician francez, Legen-

dre, într-o lucrare rămasă celebră, care se numește *Încercare asupra teoriei numerelor*, și care a apărut în 1797. Aveți deci dreptate să spuneți că rectorul Chr. Leiste nu avea de unde să cunoască aceste rezultate, dat fiind că Legendre avea să publice cartea sa cu 24 de ani mai tîrziu!

— Probabil că de aceea Leiste nici nu a atacat problema sub forma ei generală, ci s-a mărginit să considere numai cazul primelor 7 condiții. În această ipoteză el arată că soluția scoliastului e bună, însă că există încă una mai simplă, obținută prin împărțirea numerelor arătate cu 80.

Dar numai aceste date nu puteau satisface pe deplin curiozitatea și interesul matematicienilor pentru problema expusă de Lessing. Pe de o parte, ei au observat că atît numerele arătate de scoliast, cît și acelea obținute de Chr. Leiste prin împărțirea cu 80, sînt mult prea mari față de dimensiunile insulei Sicilia. S-au găsit chiar calculatori pasionați, care au arătat că suprafața insulei Sicilia de-abia ar putea adăposti turma taurilor albi și negri, dar nici într-un caz cirezile întregi de tauri și vaci.

— V-aș ruga să discutăm chestiunea autenticității acestei probleme. Pe ce temeiuri s-a sprijinit oare Lessing atunci cînd și-a exprimat îndoiala că Arhimede ar fi autorul ei? El era un adînc cunoscător al limbii și literaturii grecești și, pe deasupra, el însuși creator de opere literare. Nu-mi închipui că a putut face această afirmație, fără de vreun temei!

— Nu sînt de părerea ta, dragul meu soț. Lessing nu era matematician și nici nu cunoștea istoria matematicilor din antichitate. Și știi de ce? Pentru că pe vremea lui nu se scrisese încă o istorie a matematicilor bine documentată. E adevărat că prima lucrare de acest gen fusese scrisă în anul 1758 de Jean Etienne Montucla. Avea două volume și se tipărise la Paris, dar de-abia în 1799, cînd apare ediția a 2-a a acestei lucrări, refăcută și cuprinzînd patru volume, aceasta a avut o mai largă circulație. Lessing însă, după cum s-a amintit aici, nu mai era; el moare în 1781 și nu cred că Lessing a cunoscut prima ediție din cartea lui Montucla. Ba, chiar dacă ar fi cunoscut-o, tot nu s-ar fi putut informa de acolo asupra întregii opere a lui Arhimede, fiindcă

ca a fost studiată mult mai tîrziu. Foarte probabil că afirmațiile lui Lessing se referă mai mult la forma problemei, și nu la fondul ei. Poate că el nu-și putea închipui că Arhimede, genialul Arhimede, ar putea să-și oprească gîndurile în loc, ca să caute cuvintele potrivite să exprime prin ritmul lor datele unei probleme ce putea fi enunțată și în proză!

— Dă-mi voie să mă mîndresc cu răspunsul tău, a necăjit-o soțul, deși el e bazat numai pe intuiție... știți dv., acea intuiție proprie femeilor și care ne lipsește nouă, bărbaților! E adevărat că versurile pe care le-am citit adineauri nu au nimic deosebit. Ele sînt dintre acelea care se scriau în mod obișnuit pe la sfîrșitul evului mediu și chiar mai tîrziu. Din aceasta însă nu rezultă că ele n-ar putea proveni și din antichitate! Eu am întîlnit în antologia greacă destule probleme în versuri.

— Exact același lucru l-am afirmat și eu cînd am văzut această problemă. Așa că ar fi interesant să discutăm problema autenticității mai pe îndelete.

— Nimic mai simplu. Am să vă spun tot ce știu și rog să întrerupeți pe orator ori de cîte ori veți crede că trebuie lămurit sau pus ceva la punct. Mai întîi, cine s-a mai ocupat de această problemă? La început, aproape o jumătate de veac după tipărirea ei de către Lessing, nimeni n-a remarcat-o. O explicație ar fi: a fost dată la lumină într-o epocă de frămîntări sociale accentuate, 16 ani mai tîrziu se va declanșa marea revoluție franceză...

— Pe care Lessing nu a apucat-o.

— A murit cu 8 ani înainte.

— În aceste împrejurări nu se putea afla tihna trebuitoare pentru a aborda o problemă oarecum minoră și care apare de la început cu o faimă dubioasă, am spus eu.

— Poate, a adăugat cu îndoială tînăra doamnă. Deși nici problemele sociale și nici revoluția franceză nu au fost un impediment pentru progresul matematicilor, ci din contra. N-am decît să amintesc de lucrările lui Monge, Fourier sau de Lagrange, pe care tocmai revoluția l-a scos din starea de apatie în care căzuse cu puțin înainte și l-a făcut să fie cel mai activ și entuziast profesor de la Școala normală superioară, atunci înființată... S-ar putea să fie numai o simplă

întîmplare faptul că nimeni nu s-a mai ocupat de această problemă, timp de 50 de ani.

— Cred că aveți dreptate. Ați amintit de Lagrange. Mi-aduc aminte că am citit undeva povestea acestei apatii. La un moment dat i s-a părut, după cum o spunea chiar el, că a ajuns la capătul puterilor și nu mai găsea nici o plăcere în studiul matematicilor. Mecanica analitică, lucrare care l-a făcut celebru, a stat doi ani pe biroul său, fără să o deschidă măcar. Cînd a izbucnit revoluția, a fost îndemnat de prietenii lui din aristocrație și chiar de unii oameni de știință să se refugieze la Berlin, unde stătuse mulți ani înainte de revoluție. El a refuzat, spunînd că preferă să asiste *la experiență* pînă la capăt. În 1795, cînd s-a creat Școala normală, el a funcționat acolo ca profesor și doi ani după aceea a organizat cursurile Școlii politehnice din Paris, fiindu-i primul profesor. El, cel mai mare matematician al epocii, „cea mai înaltă piramidă a științelor matematice", cum îl numea Napoleon, îndruma acolo cu drag tineretul, pregătind primii ingineri militari ai Franței. Pentru ei scrie el tratatele rămase celebre nu numai prin problemele matematice expuse, ci și prin forma clară și ușor de asimilat în care le prezintă.

Pe lîngă acestea, cea mai importantă contribuție a sa din timpul revoluției rămîne perfecționarea pe care a adus-o la sistemul de măsuri și greutăți. Dar să revenim la problema noastră.

În 1821 apare o broșură, intitulată *O veche epigramă grecească, cu conținut matematic, publicată pentru prima oară de Lessing. Editată din nou și tratată din punct de vedere matematic și critic de dr. J. Struve, directorul gimnaziului din Altona, și de dr. K.L. Struve, directorul gimnaziului din Königsberg, tată și fiu. Altona, 1821*. Broșura are 47 de pagini și cuprinde textul original al epigramei, urmat de o traducere a ei în limba germană, vers cu vers. Calculele sînt refăcute de Struve-tatăl, pentru primele 7 condiții, ultimele două fiind considerate de el ca adăugate posterior. Tot el își exprimă părerea că numele lui Arhimede este o invenție și chiar se distrează pe această temă, afirmînd că problema trebuie să fi fost scrisă de vreun matematician

necunoscut, care s-a inspirat din *Odiseea*. Formulînd problema în hexametri și pentametri greceșți, dîndu-i numele de *epigramă* și atribuind-o lui Arhimede, spune Struve, acel matematician rîdea pe înfundate la gîndul că amăgește lumea, care se va chinui să dezlege o problemă imposibilă, compusă de el și pe care nici el n-a putut-o dezlega!

Observațiile critice sînt formulate de Struve-fiul. El arată că nu înțelege nimic din versurile 35 și 36, în care se stabilește condiția a 8-a a problemei, căci cuvîntul grec pe care Leiste l-a tradus prin *pătrat* poate avea și înțeles de dreptunghi, deoarece se știe că grecii aveau diferite numiri pentru produsele de doi, trei sau mai mulți factori, după natura acelor factori. De pildă, dacă cei doi factori erau egali, produsul se numea pătrat, dar dacă factorii erau diferiți, produsul se numea dreptunghi etc.

— Are dreptate Struve-fiul, fiindcă grecii reprezentau numerele fie prin segmente geometrice, fie prin suma punctelor legate de un anumit poligon. Sînt numerele pe care noi le numim figurate. Astfel, un număr care se poate descompune în doi factori era numit număr *plan*, fiecare dintre cei doi factori fiind interpretat ca fiind lungimea unui segment. Dacă factorii erau egali, numărul se numea *pătrat* și dacă erau diferiți, numărul se numea *dreptunghi*. Așadar, cînd se vorbea despre un număr plan, el putea fi *pătrat* sau *dreptunghi*.

Dacă își imaginau numărul ca o sumă de puncte, atunci vorbeau despre numere triunghiulare, dacă acele puncte prin așezarea lor formau un triunghi, sau pentagonale ș.a.m.d.

— Am impresia că lucrarea *celor doi Struve* nu aduce nici o contribuție reală la lămurirea misterului, căci afirmația lor cu privire la autor nu se bazează pe nici un document. Eu unul, deși nu-s de specialitate, nu pot fi de părerea lui Struve-tatăl. Din contra, aș afirma că problema a fost făcută de către Arhimede, chiar dacă nu în versuri. Și am să vă dovedesc acestea cu fapte, nu cu vorbe goale, a spus tînărul.

— Tu? Știi că mă surprinde! Eu habar n-aveam de problemă și iată că tu, care pînă acum ai stat în rezervă, scoți argumente bazate pe fapte? Crezi că metoda „uite Pell și nu e Pell" se aplică peste tot?

— De loc! Dar ascultînd atent, mi-am adus deodată aminte că am găsit cîndva, într-o scolie despre unul din *Dialogurile* lui Platon — mi se pare că era vorba de *Harmide* — ceva în legătură cu *problema boilor* a lui Arhimede. Desigur că despre această problemă trebuie să fi fost vorba acolo, căci boi, tauri, asta n-are importanță!

— Da, domnule! Chiar așa-i! a strigat, aplaudîndu-l fericit, Teodor Solonar! Peste 7 ani, în 1828, problema este reluată de Gottfr. Hermann din Leipzig. De data aceasta avem de-a face cu un studiu foarte interesant. Mai întîi, Hermann critică vehement stilul în care Struve își exprimă părerea asupra neautenticității problemei, găsindu-l *nedemn de un matematician*. El susține că problema este compusă de Arhimede și nu numai prima parte, ci *mai ales* ultima, singura de fapt care e mai greu de rezolvat. Și el susține aceasta exact cu argumentul despre care ne-ai vorbit dumneata. În plus, el arată că această problemă este citată de asemenea într-o lucrare a lui Heron din Alexandria! El mai afirmă că însuși marele Gauss s-a ocupat de această problemă și că ar fi obținut soluția ei completă.

— Mă bucură tot așa de mult această confirmare ca și cînd aș fi găsit o comoară! Acum mi-am amintit și vă pot spune chiar cum sună în greceşte expresia cu pricina: „Arhimizu boicôn pròblima".

— Interesant este că lucrarea lui Hermann a fost recenzată chiar în anul următor, dar despre *argumentarea asupra autenticității problemei nu se spune nimic*! Unul dintre recenzenți, J. Fr. Wurm, reia problema și o rezolvă în ipoteza că versul 36 ar putea fi interpretat așa cum arătase Struve-fiul, adică admițînd că totalitatea taurilor albi și negri ar forma un dreptunghi și nu un pătrat.

— Atunci Wurm consideră că ultimele două ecuații ar fi de forma:

(8) $$A + N = \text{dreptunghi};$$

(9) $$R + B = \frac{n\,(n+1)}{2}?$$

— Atenție, domnule. Matematicienii ne obligă să apucăm iar creionul de coadă! Poftim dar o hîrtie, căci stiloul îl văd în buzunarul de la haină!

— De ce nu? Ați făcut destulă pauză și nu ne temem că rezultatele nu vor fi interesante! Iată, să considerăm primele 7 ecuații rezolvate și soluțiile date de sistemul (1). După cum se observă, ecuația a 8-a este îndeplinită de la sine, căci

$$A + N = 2 \cdot 3 \cdot 4657 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot x$$

Rămîne ecuația a 9-a. Înlocuind valorile lui R și B din (1), avem:

$$(10) \quad R + B = \frac{n(n+1)}{2} = 4657 \cdot x\,[3^4 \cdot 11 + 2^2 \cdot 5 \cdot 79] =$$

$$= 4657 \cdot 2471 \cdot x = 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot x$$

Să observăm că n poate fi un număr pereche sau nepereche, adică de forma $n = 2s$ sau $n = 2s-1$. Asta înseamnă că ecuația (10) se poate scrie sub forma:

$$(11) \qquad s(2s \pm 1) = 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot x$$

Și, dat fiind că x este un număr oarecare întreg, care nu-i supus nici unui fel de restricții, Wurm are ideea ingenioasă să-l considere exprimat printr-un produs de doi factori, u și v, în așa fel ca u să fie divizibil cu s, iar v cu $(2s \pm 1)$. În acest caz, ecuația (11) conduce la următoarele sisteme de cîte două ecuații liniare, nedeterminate, sau cum se mai numesc încă diofantice:

1) $s = u$; $2s \pm 1 = 7.353 \cdot 4657\ v$; $2u \pm 1 = 7 \cdot 353 \cdot 4657\ v$

2) $s = 7u$; $2s \pm 1 = 353 \cdot 4657\ v$; $14u \pm 1 = 353 \cdot 4657\ v$

3) $s = 353u$; $2s \pm 1 = 7 \cdot 4657\ v$; $706u \pm 1 = 7 \cdot 4657\ v$

4) $s = 4657u$; $2s \pm 1 = 7 \cdot 353\ v$; $9314u \pm 1 = 7 \cdot 353\ v$

5) $s = 7 \cdot 353u$; $2s \pm 1 = 4657\ v$

6) $s = 7 \cdot 4657u$; $2s \pm 1 = 353\ v$

7) $s = 353 \cdot 4657u$; $2s \pm 1 = 7\ v$

8) $s = 7 \cdot 353 \cdot 4657u$; $2s \pm 1 = v$

Rezolvînd pe rînd aceste 16 ecuații de gradul întîi cu cîte două necunoscute și comparînd rezultatele, Wurm arată că valorile cele mai mici pentru u și v se găsesc din ecuația: $14u - 1 = 357.4657\ v$, din care rezultă $v = 1$; $u = 117423 = 3^3 \cdot 4349$, ceea ce conduce la

$$x = u \cdot v = 117423 = 3^3 \cdot 4349,$$

de unde urmează

$$s = 7u = 821961;\ n = 2s - 1 = 1643921$$

și de aici:

$$R + B = 4657 \cdot 2471 \cdot 117423 = 135123894081 = \frac{1643921 \cdot 1643922}{2}$$

Valoarea găsită pentru x trebuie folosită și în ecuația care dă numărul dreptunghiular $A + N$, adică:

$$A + N = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot 117423 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 4349 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 = 1485583 \cdot 1409076.$$

— Bine, dar, după cîte observ, cei doi factori sînt aproape egali, adică dreptunghiul este aproape un pătrat!

— Aproape, dar nu un pătrat!

— Folosind mai departe această valoare a lui x, Wurm calculează și numărul total de cornute, găsindu-l egal cu 5916837175686.

— Ar fi interesant de văzut dacă atîtea vite ar putea încăpea pe insulă.

— Aceasta l-a interesat chiar și pe Wurm. El raportează acest număr la suprafața insulei, care este aproximativ egală cu 136 bilioane m² și, presupunînd animalele împrăștiate uniform, stabilește că fiecare vită ar avea un spațiu de 23 m² în jurul ei.

— Un rezultat foarte frumos, căci corespunde oarecum și realității geografice. Trebuie să fi plăcut mult, nu-i așa?

— Nu! Deși matematicienii nu au contestat ingeniozitatea lui Wurm, și azi această soluție e numită chiar „problema lui Wurm", rezultatul nu i-a mulțumit. Problema, în forma ei originală, a continuat să preocupe pe matematicieni, de aceea vă mai cer puțină răbdare. Sîntem în 1829 și pînă în 1880, cînd apare soluția dată de Amthor, au să mai treacă 51 de ani! Desigur, 51 de ani e mult, o viață de om, așa că se cuvine să facem o pauză ca să ne mai întărim, gustînd cîte ceva și bînd o cafea, și să ne mai dezmorțim cercetînd vremea, care, după cîte văd, ține cu noi, cei îndrăgostiți de matematici...

— Orice s-ar mai întîmpla în cei 51 de ani următori, a reînceput tînărul istoric discuția, nu cred că se va mai putea pune la îndoială autenticitatea problemei, deși, după cum am auzit, argumentele aduse de Hermann nu au fost comentate de loc.

— Adevărul a fost stabilit destul de greu, a răspuns prietenul meu. Mai întîi G.H.N.F. Nesselmann, în cartea sa *Algebra la greci*, pe care o publică în 1842, se alătură părerii lui Struve, adăugînd încă următoarele două argumente în favoarea ipotezei lui: 1) partea a doua a problemei *nu a putut fi scrisă de Arhimede*, deoarece pe vremea lui nu se putea vorbi de numere triunghiulare, iar partea întîia fără cea de-a doua, singura care ar prezenta o anumită greutate, nu poate fi considerată ca datorată lui Arhimede; 2) această epigramă nu poate fi datorată lui Arhimede, căci nu se găsește în colecția de epigrame întocmită în veacul al XIV-lea de Planudiu.

— Bine, dar acest din urmă argument nu-i de loc valabil! E normal să nu pui în colecție un lucru pe care nu-l cunoști! Și iar e foarte posibil ca această problemă să aștepte într-un manuscris uitat în cine știe ce bibliotecă, pe care nu-l descifrase nimeni pe atunci. Cum a dat Lessing de el, altfel decît din întîmplare?

— Foarte adevărat. De altfel, nici primul argument nu-i mai breaz, a spus tînăra cu înflăcărare. Deși grecii nu aveau sistemul nostru de scriere a numerelor, ei cunoșteau foarte

bine numerele triunghiulare, încă de pe vremea lui Pitagora. După cum s-a mai amintit azi aici, ei își imaginau numerele întregi ca pe niște grămezi de puncte, pe care le numeau triunghiulare dacă le puteau așeza în formă de triunghi. Așa sînt numerele de forma $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ etc. În aritmetica lui Nicomach, scrisă în în primul secol al erei noastre, găsim chiar o teorie a numerelor poligonale. S-ar putea însă ca Nesselmann să nu fi cunoscut lucrarea lui Hermann și nici pe acelea ale recenzenților lui. Dar mai tîrziu, în 1855, găsim alt articol al cunoscutului matematician A.J.H. Vincent, membru al Academiei Franceze, care, după ce citează părerea lui Struve, adaugă: „...Într-adevăr, această epigramă este complet străină de spiritul lucrărilor care aparțin incontestabil geometrului sicilian".

— E nemaipomenit! Nici Vincent nu a cunoscut lucrarea lui Hermann?

— Ba da, a cunoscut-o, însă nu a fost de părerea acestuia. Analizînd problema, el o reduce numai la versurile 1 — 16 — care cuprind enunțul primelor trei ecuații — și la versurile 27—30, care, spune el, dau un epilog foarte convenabil. Ca soluții află numerele...

— Dar prin această trunchiere problema poate figura în orice carte de aritmetică de curs elementar și deci nu mai poate fi vorba de o problemă a lui Arhimede...

— Vincent aruncă doar de la început această ipoteză...

— Atunci nu ne mai interesează soluția sa. Preferăm să auzim alte voci!

— Fie, pe voia dv. Iată trei voci puternice, care de data aceasta se alătură la aceea a lui Hermann. Prima, în 1879, este a renumitului profesor din Copenhaga J.L. Heiberg, cel mai în drept să decidă dacă un text ar aparține sau nu lui Arhimede, deoarece el publică în 1880 o nouă ediție a operelor lui Arhimede, însoțite de comentariile pe care le-a scris Eutocios prin veacul al VI-lea.

— Faima lui Heiberg știu că se datorește descoperirii unui nou manuscris al lui Arhimede, *Metoda*, care se considera pierdut.

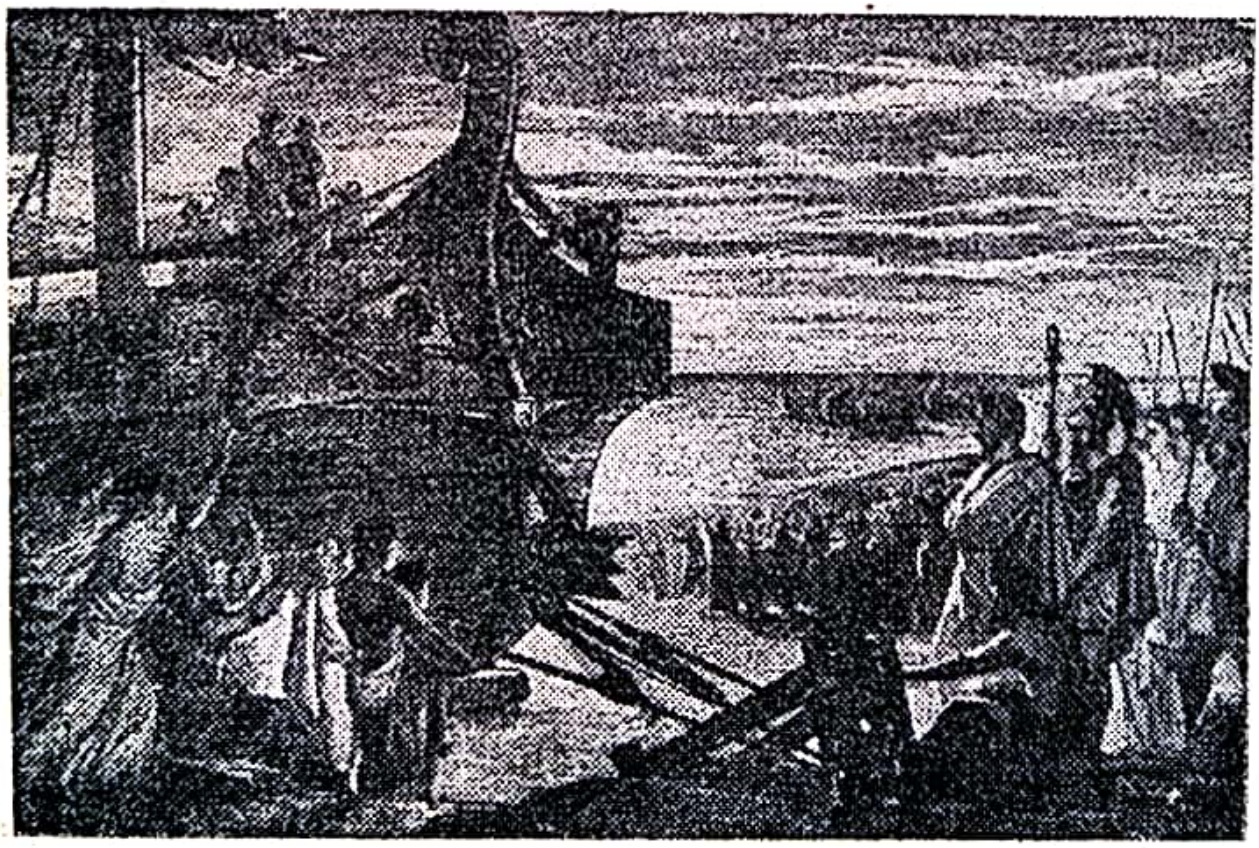
— Da. Dar acea descoperire s-a făcut în 1906. Păstrînd ordinea cronologică despre această descoperire, foarte interesantă pentru noi, am de gînd să vă vorbesc mai tîrziu.

Acum, în 1879, Heiberg afirmă, în teza sa de docență, că părerile lui Hermann cu privire la autorul problemei taurilor sînt pe deplin justificate. Bineînțeles ca fond, căci forma de *epigramă* în care găsim problema azi o consideră posterioară lui Arhimede. Același lucru îl susține și dr. B. Krumbiegel, într-un documentat articol, pe care îl publică în anul următor împreună cu dr. A. Amthor, primul autor discutînd problemele filologice și autenticitatea, iar ultimul stabilind soluția generală a problemei.

De acord cu ei este și renumitul istoriograf al matematicilor greceşti Paul Tannery, care arată în 1881 și sursa de unde a luat scoliastul lui Platon informația sa în legătură

Fig. 8

Arhimede trăgînd o galeră pe rîu cu ajutorul unei mașini



cu problema boilor lui Arhimede. Anume, Paul Tannery arată că problema boilor a fost menționată ca aparținînd lui Arhimede în lucrările matematicianului grec Geminus din Rodos, care a trăit în a doua jumătate a veacului I î.e.n.

În fine, în traducerea în limba engleză a operelor lui Arhimede, pe care o face T.L. Heath în 1897, este introdusă și problema boilor, considerată în mod definitiv ca aparținînd lui Arhimede. Și cu asta eu am terminat povestea!

— Așa? m-am răzvrătit eu, întărîtat. *Ai terminat povestea*, fără să ne fi lămurit lucrul cel mai principal din toată povestea aceasta, misterul ei? Matematicienii pot fi satisfăcuți prin calcule și prin această înșirare cronologică de lucrări, căci din cauza copacilor ei nu mai văd pădurea. Dar pentru mine și colegul meu de breaslă de-abia acum începe problema!

— Într-adevăr, a intervenit colegul meu. Dacă s-a stabilit că problema a fost compusă de Arhimede, ar fi de dorit să aflăm ce l-a îndemnat să o facă? Căci o problemă care conduce la asemenea calcule ca acelea pe care le-am văzut e puțin probabil să fi fost inventată așa, de florile mărului. De ce dar a scris-o, cu ce scop?

— Cu alte cuvinte, văd că problema aceasta a reușit să vă fie simpatică, nu? Ei bine, dragii mei prieteni, chiar dacă îi mai ocărîți pe matematicieni, vă mulțumesc că ați pus această întrebare. Ca mulțumirea să nu rămînă platonică, vă fac chiar acum niște cafeluțe fierbinți ca iadul. Ne trebuie o aprovizionare, căci pentru dezlegarea misterului ne vom duce, cale lungă să ne-ajungă, cu vreo 22 de veacuri înapoi, ca să-l găsim pe Arhimede și să-l întrebăm pe el. Avem noroc că în lumea matematicilor nu există granițe nici pentru spațiu și nici pentru timp!

— Ne va primi oare? Nu ne va răspunde și nouă „Nu-mi tulburați liniștea", ca odinioară acelor soldați romani: „Nu vă atingeți de cercurile mele"? a întrebat sfios tînăra.

— A, nu! Sînt sigur că nu va mai răspunde așa. Noi nu-i mai putem tulbura gîndurile care urmăreau dezlegarea unei probleme, fiindcă problemele ce și le-a pus el atunci au fost de mult rezolvate. Azi opera lui e admirată chiar și de cei ce nu o mai citesc în original. Venirea noastră îi va deș-

tepta amintirile și ne va întîmpina cu zîmbetul cald al bunicului înconjurat de nepoții care așteaptă să le spuie o poveste.

Ne-am băut cafelele, putem porni! Să lăsăm aici cerul întunecat și vremea ploioasă și să coborîm în colțul dinspre sud-estul insulei cu trei unghiuri, la Siracuza, încîntătoarea cetate, unde, sub un cer albastru strălucitor, s-a născut și a murit Arhimede. Precis nu se știe cînd s-a născut, se pare că pe la 287 î.e.n.

— În schimb, anul morții se cunoaște cu precizie. Știm cu toții că a fost ucis în anul 212, în al doilea război punic, de un soldat al lui Marcellus.

— Tradiția spune că pe atunci avea 75 de ani, de aceea se admite ca dată a nașterii aceea pe care v-am spus-o.

— Știați că în 1961, între 11 și 16 aprilie, au avut loc la Siracuza serbări în amintirea lui Arhimede?

— O, desigur, doamnă. Cînd am fost ultima oară la Iași, am găsit în Biblioteca seminarului matematic „Alexandru Myller" cele 3 volume ale Simpozionului de geometrie diferențială care s-a ținut acolo cu ocazia acestor serbări. M-a interesat mai ales volumul I, în care s-au tipărit discursurile și conferințele generale ce s-au rostit cu acest prilej. Discursul de deschidere a fost ținut de Paul Montel și, dacă vreți, aș putea căuta printre hîrțoagele mele să vă citesc cîteva din frazele care le-am însemnat acolo.

— Numai dacă nu va dura căutatul mai mult decît am avea noi răbdare să așteptăm! l-am necăjit eu.

— În privința asta, nici o teamă. Nu știți ce spune proverbul: „Să nu-i dea Dumnezeu omului cît poate răbda!" Caietul meu de însemnări e aici pe policioară! Iată ce a spus Montel despre Arhimede: „Fascinanta bogăție a facultăților lui inventive i-au permis să evolueze cu aceeași ușurință și putere creatoare în abstract, ca și în concret, în științele de bază, ca și în științele aplicate, să fie savantul care meditează și inginerul care construiește. Aceste calități, pe care le vom regăsi mai tîrziu la un Leonardo da Vinci, s-au întrunit rar în același om, iar în zilele noastre această reunire e greu de conceput. Pentru Arhimede

renumele de tehnician s-a răspîndit mai repede decît acela de savant, pentru că descoperirile lui în concret erau accesibile unui număr mai mare...“ Sau, mai departe, unde spune: „Descoperirile lui sînt fructul unei imaginații și al unei intuiții care au depășit secolele și au dat germenii teoriilor care nu s-au dezvoltat deplin decît mult mai tîrziu...“ Ei, vă place?

— Desigur, totdeauna îți face plăcere să asculți lucruri pe care le știi și tu, dacă sînt spuse într-o formă deosebită. Eu mi-aduc aminte cu cîtă admirație vorbește Plutarh despre Arhimede, deși numai în treacăt. El arată că era un spirit așa de profund și de o așa de mare bogăție de teorii geometrice, încît n-a vrut să mai scrie nimic despre construcțiile mașinăriilor sale, care-i aduseseră atîta glorie! Însă, dragul meu prieten, parcă era vorba că ne ducem să-l întîlnim pe Arhimede, și nu să asistăm la un congres matematic, fie el chiar în onoarea lui Arhimede și în Siracuza! Noi o pornisem către Siracuza din veacul al III-lea î.e.n., pe cînd acest oraș era un mic stat monarhic și unul dintre cele mai cosmopolite orașe din Grecia...

— Da! aici cam ai avea dreptate, s-a scuzat Teodor Solonar. Te asigur că mergem într-acolo, dar nu într-o rachetă cosmică, să nu putem face nici o escală! Uite însă că am ajuns unde doreai. Familia în care s-a născut Arhimede nu-i prea bogată. Tatăl lui era astronom, îl chema Fidias și se ocupa singur de educația fiului său.

— Probabil că acesta este motivul care te face să pui la îndoială buna stare materială a părinților; oamenii înstăriți aveau obiceiul să tocmească profesori de filozofie sau de literatură pentru copiii lor.

— Se spune că Arhimede a fost atras de mic copil numai de studiul matematicilor și al astronomiei, singura lui distracție fiind invențiile mecanice.

— Ce distracție poate întrece pe aceea de a-ți crea tu însuți jucăriile pe care alții nici nu-s în stare să le mînuiască cum trebuie?

— După cum se vede, în casă există cîte un exemplar din cărțile nu de mult apărute ale lui Euclid, *Elementele* și *Secțiunile conice*, cărți care cuprind destul material la

care să te gîndești pe îndelete. Arhimede nu a părăsit orașul natal ca să caute învățătura aiurea decît tîrziu, după ce o rudă de-a familiei lui, Heron, este ales de locuitorii orașului ca tiran, adică conducător al Siracuzei. De-abia după aceea Arhimede se duce la Alexandria ca să-și desăvîrșească studiile sale.

— Într-adevăr, pe atunci Muzeul — cuvîntul este o prescurtare pentru *Templul Muzelor* — era vestit atît prin oamenii de știință și problemele pe care se cercetau acolo, cît și prin biblioteca, colecțiile de material științific sau prin grădinile sale!

— De altfel, Alexandria rivaliza cu Atena, primul centru de cultură al lumii elene, și o întrecea în ceea ce privește matematica și astronomia. În schimb, Atena era neîntrecută în domeniul literaturii și al filozofiei.

— Și întrucît Arhimede înclina către matematici, e clar că a ales drumul Alexandriei. Acolo a legat prietenie cu doi dintre cei mai mari matematicieni ai vremii: Conon și Eratostene. O știm precis din scrisorile pe care le adresează acestor doi matematicieni, după ce se reîntoarce în Siracuza.

— Bine, dar atunci problema are o adresă foarte precisă, și nu fictivă. Drept să-ți spun, mă mir că s-a putut pune la îndoială autenticitatea problemei, dacă se cunoșteau toate acestea! am observat eu, surprins.

— *Dacă se cunoșteau acestea*, bine spus, vorba este că atunci cînd se discuta problema, nu se cunoșteau acestea!

— Ce vrei să spui?

— Exact cele ce ai auzit. Unul dintre argumentele pe care se sprijineau cei ce îi contestau autenticitatea era tocmai acesta: dacă Arhimede a scris scrisori lui Eratostene, de ce nu s-au păstrat și altele, în afară de epigrama cu pricina, așa după cum au rămas scrisorile adresate de el lui Conon sau Dositeu?

— Ar fi foarte interesant să cunoaștem aceste scrisori mai îndeaproape.

— Nimic mai simplu. Iată, de pildă, scrisoarea care se află ca prefață în cartea sa despre *Cvadratura parabolei*. „Arhimede îi urează sănătate lui Dositeu. Aflînd că prie-

tenul meu Conon a murit și că tu, ca și mine, îi erai apropiat și, afară de aceasta, aflînd că ești un cunoscător al geometriei, cu toată durerea care mi-a pricinuit-o pierderea unui amic și a unui excepțional matematician, am hotărît să-ți trimit scrisoarea pe care intenționam să i-o trimit lui Conon, comunicîndu-ți o teoremă de geometrie..." O altă scrisoare, tot către Dositeu, însoțește și cartea *Despre sferă și cilindru* și, în fine, o a treia se află într-o lucrare unde-i vorba despre o curbă care se numește „spirala lui Arhimede"; cartea are ca titlu *Despre spirale*.

— Dați-mi voie să vă corectez: titlul acelei cărți era *Despre elice*, și nu despre spirale, căci aceste curbe pe care noi le numim *spirale* Arhimede le numea elice.

— Aveți dreptate. N-am folosit termenul de atunci, căci pentru noi elicea este curba șurubului, adică alta decît spirala.

— Atunci vă rog să continuați a ne citi din scrisorile lui.

— „Arhimede îi dorește sănătate lui Dositeu. Cea mai mare parte dintre teoremele pe care le-am trimis lui Conon, ale căror demonstrații mă rogi în fiecare scrisoare să ți le comunic, au fost demonstrate în lucrările mele, pe care ți le-a adus Heraclit...; și să nu te miri că am întîrziat atît de mult cu publicarea acestor demonstrații. Am vrut mai întîi să comunic aceste teoreme oamenilor care se ocupă cu matematica și care ar fi vrut să încerce să le demonstreze singuri. Foarte multe dintre aceste teoreme geometrice, care, la prima vedere, par extrem de dificile, se pot rezolva pînă la urmă cu succes. Conon a murit însă înainte de a fi putut să-și facă timp pentru a se ocupa de aceste teoreme. Dacă n-ar fi survenit moartea, el ar fi găsit cu siguranță rezolvarea tuturor problemelor... S-au scurs mulți ani de la moartea lui Conon și încă n-am auzit ca cineva să se fi apucat de rezolvarea vreuneia dintre aceste probleme. De aceea voi enumera aici pe rînd toate teoremele propuse de mine lui Conon, și în special două dintre ele, care m-au dus la o concluzie falsă; fie ca această întîmplare să constituie un exemplu și un avertisment pentru oamenii care afirmă că pot soluționa orice problemă

pe care o propun spre rezolvare altora, fără să o însoțească de propria lor soluție, iar în cele din urmă sînt nevoiți să admită că au încercat să demonstreze imposibilul." În această scrisoare el arată mai departe care este enunțul și soluția corectă a celor două teoreme false.

— Curioasă de tot această atitudine a lui Arhimede!

— Da, și e bine să o reținem, căci am putea găsi aici o urmă care să ne ducă la rezolvarea misterului! Însă înainte de a vorbi despre acesta, trebuie să vă spun că în anul 1906, adică mult după ce misterul autenticității fusese lămurit, s-au descoperit și alte scrisori trimise de Arhimede lui Eratostene. Una se găsește în prefața la o carte ce se considera pierdută: *Despre metoda demonstrării teoremelor cu ajutorul mecanicii*. Această scrisoare începe cu salutul obișnuit: „Arhimede îi urează sănătate lui Eratostene. Ți-am trimis mai înainte cîteva dintre teoremele găsite de mine, comunicîndu-ți numai concluziile și propunîndu-ți să găsești singur demonstrațiile..." Dacă e dovedit că Arhimede l-a cunoscut pe Eratostene, se poate trage și o concluzie asupra vîrstei pe care a avut-o cînd s-a dus la Alexandria. Se pare că Eratostene din Cirene era de-o vîrstă cu Arhimede și se știe că el a devenit astronom la curtea lui Ptolemeu al III-lea, fiind chemat în anul 245 din Atena ca profesor pentru fiul și moștenitorul tronului. Așadar, scăzînd din 287 pe 245, rămîn 42 de ani.

— Atunci Arhimede nu a fost elevul școlii din Alexandria!

— Asta cred că nu, dar el a studiat acolo, căci oricînd, la orice vîrstă și cu orice bagaj de cunoștințe poți merge ca să studiezi într-un centru în care știi că vei găsi atît materialul științific de care ai nevoie, cît și oamenii care lucrează în aceeași direcție. Așa se explică și faptul că Arhimede a legat prietenie cu acești doi savanți și că le propunea lor spre demonstrare enunțul teoremelor pe care le stabilea. Era atunci un obicei al matematicienilor de a-și comunica descoperirile lor prin scrisori, pe care îl regăsim din nou în floare în secolele al XVII-lea și al XVIII-lea.

— M-ar interesa să aflu cum s-a descoperit ultima lucrare a lui Arhimede? Nu a fost, cumva, întîmplător?

— Desigur, asemenea descoperiri au de obicei acest caracter. Ceea ce-i mai nostim e că a fost găsită într-un palimpsest.

— Vrei să spui că lucrarea lui Arhimede a fost scrisă pe un pergament pe care fusese scris mai înainte un alt text și acesta a fost șters ca să fie transcrisă *Metoda*?

— Din contra! Pergamentul pe care fusese scrisă cartea lui Arhimede a fost spălat de către un călugăr grec, ca să scrie pe deasupra lui un text liturgic!

— Dar atunci cum s-a mai putut descoperi vechiul text?

— Tocmai aceasta-i nostim! Textul liturgic, scris prin veacul al XIII-lea, se află în biblioteca unei mănăstiri din Constantinopol. Un savant cercetător care a întocmit catalogul manuscriselor a băgat de seamă că sub noul text se mai putea descifra destul de bine cel inițial, deoarece pergamentul fusese spălat foarte superficial. În catalog el a reprodus și un extras din textul matematic inițial, despre care nu putea spune nimic, nefiind specialist.

— Într-adevăr foarte nostim! Ori călugărul a fost cam leneș, ori i-a părut rău că trebuie să distrugă un text antic, pe care-l prețuia! În 1906, prof. J.L.Heiberg din Copenhaga, unul dintre cei mai serioși cercetători ai istoriei matematicilor și care, după cum am văzut, cunoștea îndeaproape opera lui Arhimede, făcînd o călătorie la Constantinopol și cercetînd acest catalog, a recunoscut imediat că textul aparține lui Arhimede. El a cerut permisiunea să-l reconstituiască și peste un an publică, aproape în întregime, textul reconstituit. S-a stabilit astfel că multe părți din text erau lucruri cunoscute, dar printre acestea a găsit și o foarte importantă operă necunoscută a lui Arhimede, *Metoda*, în care se afla și scrisoarea către Eratostene.

— Cred că printre subiectele discutate de Arhimede și Eratostene trebuie să fi fost multe din teoria numerelor. Cine n-a auzit de ciurul lui Eratostene, am observat eu.

— Cum cine? *Eu*, soțul unei matematiciene! O declar aici în fața dv. că habar n-am de acest ciur. Probabil că nu are legătură cu ecuația lui Pell! Totuși n-aș vrea să insinuez că ea nu ar cunoaște problema...

— Vedeți? Iar începe! Vă rog deci să mă lăsați pe mine să-i explic ce este cu ciurul lui Eratostene, căci altfel s-ar îndoi că știu despre ce e vorba! Încă de pe vremea lui Pitagora, matematicienii greci au împărțit numerele în prime și neprime. Dar nu se știa cum s-ar putea stabili dinainte dacă un număr e prim sau nu, așa după cum se constată dacă un număr este par sau impar...

— Și Eratostene a construit un ciur prin care a cernut numerele?

— Da, dragul meu. Probabil ca să vadă dacă n-ar putea observa vreo regularitate în distribuția lor. El a scris toate numerele, de la 1 pînă la 1 000, în șiruri regulate și unele sub altele, pe un papirus. Ca acesta să stea întins și să nu se necăjească să-l dezdoaie ori de cîte ori s-ar face sul, l-a fixat într-un cadru de lemn. Apoi a găurit papirusul, tăind rotocoale în locurile unde se aflau numerele neprime; cînd a terminat operația, acea tabelă părea un ciur prin care se cernuseră toate numerele neprime. Se vede că imaginea aceasta a plăcut foarte mult, căci de atunci și pînă azi, tabela numerelor prime de la 1 la 1 000, deși nu se mai perforează, poartă numele de *ciurul lui Eratostene*.

— Cum de n-a găsit o metodă mai expeditivă?

— Era singura metodă pe care a putut-o folosi atunci și a rămas singura metodă care se folosește și azi atunci cînd vrei să știi dacă un număr este prim sau nu. Ei, ești mulțumit, se poate continua?

— Acum da, și îl rog pe domnul Solonar să ne conducă pe urmele lui Arhimede.

— Reîntors la Siracuza, a reluat prietenul meu, Arhimede a avut condițiile necesare ca să se dedice atît problemelor de matematică teoretică, cît și acelora de aplicații practice, necesare ca să-l ajute pe Hieron să-și întocmească o apărare față de posibilitățile unui eventual atac din partea romanilor. Dar acele realizări nu le vom urmări acum. Ne mărginim să căutăm numai printre problemele legate de sistemul de numerație. După cum se știe foarte bine, la baza gîndirii matematice grecești se află noțiunea de număr întreg. Pitagoricienii erau așa de încîntați de pro-

prietățile numerelor întregi, încît au fost tentați să atribuie unora dintre ele chiar un sens mistic.

— Așa-i, numai că mistica numerelor întregi a suferit o grea lovitură tot în școala pitagoriciană, atunci cînd tot ei au descoperit numărul irațional, care nu se mai putea exprima prin raportul dintre două numere întregi, a observat prietena noastră.

— Totuși cu toată subtilitatea raționamentului lor, grecii n-au ajuns la un sistem de numerație care să fie comod atît pentru cercetările teoretice, cît și pentru calculul practic, așa cum au făcut-o hindușii, a continuat Teodor Solonar.

— Poate fiindcă grecii au separat problemele teoretice de cele practice, a intervenit iar ea. În cărțile a VII-a, a VIII-a și a IX-a din *Elemente*, în care Euclid se ocupă de aritmetică, nu găsim rezolvată nici o problemă numerică, nu se efectuează nici un calcul cu numere. Metodele de socotit formau un obiect aparte, numit *logistică*, și în acest scop se foloseau abacele. Euclid nu arată cum se fac operațiile numerice.

— Ca să înțelegem ușor care a fost contribuția lui Arhimede în legătură cu problema numerației, să vedem cum scriau numerele vechii greci. Mai întîi ei foloseau în loc de cifre literele alfabetului lor, la care au mai adăugat încă trei litere din alfabetul fenician. De toate fiind 27 de semne, erau destule pentru notarea numerelor de la 1 pînă la 999; primele 9 litere formau cifrele pentru numerele de la 1 pînă la 9, următoarele 9 reprezentau zecile, iar ultimele 9 sutele. De pildă: numărul 529 se scria astfel $\varphi K0$, fiindcă $\varphi = 500$, $K=20$ și $0=9$. După cum se vede, deși sistemul lor de numerație era zecimal, scrierea numerelor se deosebește fundamental de a noastră, fiindcă grecii nu foloseau aceleași semne pentru notarea unităților, zecilor sau a sutelor, așa cum o facem noi. Noi putem scrie un număr oricît de mare numai cu 10 semne, pe cînd ei, cu 27 de semne, nu puteau scrie decît un număr pînă la 999! Ori nu poți inventa semne la nesfîrșit, și nici să le poți ține minte! Iar sistemul lor de juxtapunere cerea mereu semne noi și cu cît numărul era mai mare, cu atît aveau nevoie de mai multe semne ca să-l poată scrie.

— Aceasta nu-i cu putință și, chiar de s-ar putea, puțini oameni ar fi în stare să-l folosească!

— Tocmai din cauza aceasta, sistemul lor de numerație s-a oprit la 999, căci pentru mii nu au mai introdus semne noi, ci au folosit aceleași litere ca pentru unități, la care le-au adăugat o virgulă înainte. Așadar, β reprezenta numărul 2, iar, β = 2000.

Se menționează în literatură că pe vremea lui Homer grecii numărau numai pînă la 1 000. Cuvîntul miriadă, în greceşte *mirioi*, însemna atunci un număr nedefinit de mare, am adăugat eu.

— Exact! Mult mai tîrziu au definit ei *miriada* ca avînd 10 000 de unități și au notat-o cu *M*, inițiala cuvîntului, pe care au așezat-o, ca și pe virgulă, înaintea semnelor care arăta numărul (adică a literelor respective), sau puneau numărul deasupra acestui *M*.

Astfel,

$$\overset{\gamma}{M}, \delta\rho\upsilon\gamma = 34\,153, \text{ fiindcă } \overset{\gamma}{M} = 30\,000;$$

$$,\delta = 4\,000;\ \rho = 100;\ \upsilon = 50 \text{ și } \gamma = 3$$

Cu acest semn grecii au putut scrie orice număr pînă la 9999 9999, o miriadă de miriade, sau, cum spunem noi, o sută de milioane, număr pe care însă nu-l puteau scrie, deși îl pronunțau.

Dar ar fi mai bine dacă l-am ruga pe Arhimede să ne vorbească și nouă, așa cum i-a vorbit lui Gelon, regele Siracuzei și urmașul lui Heron: Să ascultăm: „Există oameni, o rege Gelon, care cred că numărul firelor de nisip ce s e nesfîrșit de mare. Nu mă refer la nisipul care este în jurul Siracuzei și e răspîndit în Sicilia întreagă, ci chiar la acel care se află nu numai în ținuturile locuite, ci în acelea n locuite. Alții cred că numărul firelor de nisip nu-i infinit d mare, dar că-i imposibil să-ți imaginezi un număr mai mare. Dacă acei ce gîndesc așa și-ar închipui un volum de nisip care ar fi egal cu acela al pămîntului, care ar umple toate golurile sale și adînciturile mărilor și care s-ar ridica pînă în vîrful celor mai înalți munți, e evident că ar fi și mai

puțin dispuși să creadă că ar putea exista un număr care să depășească pe acela al firelor de nisip. Cît despre mine, voi arăta prin demonstrații geometrice, pe care tu nu vei putea să nu le accepți, că printre numerele numite de noi în cărțile pe care le-am adresat lui Zeuxippe există unele care întrec numărul firelor dintr-un volum de nisip egal nu numai cu acela al volumului pămîntului, ci încă cu al universului întreg".

— Cum așa? Pe vremea lui Arhimede oamenii credeau că nu există un număr mai mare? a întrebat asistentul de la istorie.

— Da. Erau unii care credeau așa și alții care credeau, cum afirmă Arhimede, că este imposibil să treci de *o anumită limită*, de pildă aceea a numărului firelor de nisip de pe țărmul mării.

— De fapt era normal să fie așa, o dată ce nu existau nici numiri și nici semne pentru numerele mai mari de 10^8, adică o miriadă de miriade! a întărit mușafira noastră.

— 10^8 este o notație și o numire modernă, a reluat Teodor Solonar, căci grecii nu aveau notația exponențială pentru puterile unui număr și nu cunoșteau regulile de operații cu exponenți. Acestea le-a descoperit Arhimede. Ascultați cît de limpede o spune el însuși după ce, în cartea despre care v-am vorbit, arată procedeul prin care poate determina atît volumul sferei ce ar cuprinde universul, cît și pe acela al unui fir de nisip. „Acum cred că-i necesar să vorbesc despre numirile numerelor. Dacă n-aș spune nimic în această carte, mă tem să nu-i încurc pe acei ce nu au citit cartea pe care am adresat-o lui Zeuxippe. S-au dat nume numerelor pînă la o miriadă și, dincolo de o miriadă, numele ce s-au dat numerelor sînt destul de cunoscute, căci nu se face alta decît se repetă o miriadă pînă la zece mii de miriade. Numerele despre care vom vorbi și care merg pînă la o miriadă de miriade să le numim *primele numere* și să considerăm *o miriadă de miriade de unități ale numerelor prime* ca *unități de numere secunde:* să numărăm cu aceste unități și cu zecile, sutele, miile și miriadele acestor unități pînă la o miriadă de miriade. Să spunem că *o miriadă de miriade de numere secunde este o unitate a numerelor terțe*; să numărăm cu

aceste unități, cu zecile, sutele, miile și miriadele acestor noi unități pînă la o miriadă de miriade: *o miriadă de miriade de numere terțe să se numească unitate de ordinul al patrulea* și să continuăm să dăm nume la numerele următoare pînă la o miriadă de miriade de numere compuse dintr-o miriadă de miriade de numere..."

— Te rog să te oprești! am spus, simțind parcă deodată o amețeală. Ție, care ai citit aceste lucruri de mai multe ori și le-ai copiat pe hîrtie, îți par foarte clare. Desigur că și dumneavoastră, doamnă, dar mie nu! Cred că același lucru îl va afirma și colegul meu. Aș vrea să traducem acum cele spuse de Arhimede în limbajul nostru și, abia după ce voi înțelege despre ce-i vorba, poți trece mai departe!

— Bine, să o facem, a oftat cu încîntare prietenul Teodor. O miriadă = 10 000 sau 10^4; O miriadă de miriade = $10\,000^2 = 10^8$. Aceasta este o octantă, cum va spune Arhimede mai departe. Ea formează *unitatea numerelor secunde*. Cu această unitate el numără pînă la 10^8. Înseamnă că ajunge pînă la $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$. Așadar, 10^{16} (adică $10^{2 \cdot 8}$) se consideră ca unitate a numerelor terțe sau, cum le-am spune noi, a numerelor de ordinul al treilea. În general deci, $10^{m \cdot 8}$ va reprezenta unitatea numerelor de ordinul $(m + 1)$.

— Bine dar mi-ai spus că Arhimede nu cunoștea notația exponențială. Atunci cum de a numit o miriadă de miriade *o octantă?*

— Habar n-am! Știu atît cît spune el, restul ia-l de bun așa cum îl auzi!

— Slab răspuns! Nu-mi rămîne decît să văd cum aș scrie ultima unitate, aceea a ordinului miriadelor de miriade! Trebuie să aibă forma $10^{8(10^8-1)}$, iar numărul ce urmează ultimului număr din această clasă se va scrie ca $10^8 \cdot 10^8$. Fantastic! Iată un număr pe care-l poți scrie, dar nu și imagina! Totuși lucrurile s-au mai limpezit și poți continua!

— Mulțumesc de îngăduință. Iată, dar, cum urmează Arhimede: „Cu toate că acest mare număr de numere cunoscute ar fi cu siguranță mai mult decît suficient, se poate totuși merge mai departe. Într-adevăr, să numim numerele despre care am vorbit *numere din prima perioadă*, iar ulti-

mul număr din prima perioadă să-l numim *unitatea numerelor prime din perioada a doua*. Tot așa, o miriadă de miriade a primelor numere din perioada a doua să o numim unitate de ordinul al doilea din a doua perioadă... și să continuăm a da nume numerelor următoare pînă la numărul din a doua perioadă, care ar fi egal cu o miriadă de miriade de numere compuse din miriade de miriade.

— Oprește-te, să socotim!

— Lasă-mă, că dacă mă vei întrerupe așa după fiecare perioadă pe care o propune Arhimede, vor trebui cîteva vieți pentru calculele tale! Să termin întîi, că nu mai am mult, și apoi ai să te lămurești. Dv. sînteți de acord cu mine, sau vă asociați cu rebelul meu prieten?

— Și noi și dumnealui vă rugăm să continuați.

— „Mai mult, ultimul număr din perioada a doua să fie numit unitatea primelor numere din perioada a treia și să continuăm a da nume tuturor numerelor pînă la o miriadă de miriade, care fac parte din perioada formată dintr-un miriad de miriade de numere de miriade de miriade." Ne oprim, căci aici se termină și prezentarea sistemului de numerație propus de Arhimede, deși de aici înainte urmează partea cea mai interesantă a cărții.

— Cred. Dar ne consolează faptul că în lumea asta sînt foarte multe lucruri extraordinar de interesante, numai că bietul om nu le poate cuprinde pe toate nici măcar în gînd. Urmînd de unde am rămas, înseamnă că numerele din perioada a doua încep cu $10^{8 \cdot 10^8}$, cele din perioada a treia cu $10^{2 \cdot 8 \cdot 10^8}$, iar ultimul număr în fața căruia se oprește Arhimede este acela din ultima perioadă a miriadelor de miriade, care se va scrie $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$ adică 1 urmat de optzeci de cuatralioane de zerouri!

— Număr pe care nici măcar nu ți-l poți imagina, fiindcă mi-ai spus că nu-ți poți imagina nici pe $10^{8 \cdot 10^8}$. E. Kolman a calculat însă lungimea acestui număr, dacă cifrele sale ar fi scrise unele lîngă altele așa de strîns ca fiecare zero să ocupe numai o lățime de un milimetru! În această ipoteză a arătat că pentru a-l scrie trebuie să ai la îndemînă o

întindere care să depășească de 500 de ori distanța Pămînt-Soare!

— Dar numărul firelor de nisip? A calculat într-adevăr Arhimede cît e de mare? am întrebat eu curios.

— A, da, el se află printre numerele din prima perioadă, și anume, după cum spune Arhimede, „este mai mic decît o mie de miriade de unități a numerelor de ordinul al 8-lea", adică este mai mic decît $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8} = 10^{63}$.

— Așadar, iată încă un argument care pledează pentru teza autenticității problemei taurilor, domnule Solonar: Arhimede își crease numerele cu care să jongleze în această problemă! Întrebarea este dacă se mai găsea cineva, căci nu îndrăznesc să mă gîndesc că ar fi putut exista prea mulți, care să poată mînui numerele mari, fiindcă altfel problema risca să rămînă fără de răspuns!

— Fără de răspuns a rămas ea pe atunci oricum, dar de găsit se mai găseau și alții care au fost atinși de delirul numerelor mari; asta e sigur! Mai întîi de toate era Apolloniu din Pergam, savant renumit, care se impusese lumii matematice de atunci prin cele opt cărți asupra secțiunilor conice; se pare că a trăit între 260 și 200 î.e.n. El a stat multă vreme în Alexandria și, după cum o spune singur în prefața la cartea I a *Secțiunilor conice*, a cunoscut corespondența lui Conon. Din Alexandria, Apolloniu a fost chemat la curtea regelui Attalos din Pergam. Acolo a petrecut vreme îndelungată în tovărășia altor matematicieni. Dar între Arhimede și Apolloniu, mai tînăr decît Arhimede cu vreo 20 de ani, nu au existat, pare-se, raporturi de prietenie, ci tocmai contrare. Vrajba s-a încins, așa cum se întîmplă de multe ori, atîțată de zelul prietenilor, după cît se pare, atunci cînd au apărut cărțile lui Apolloniu despre *Secțiunile conice*. Arhimede scrisese și el despre secțiunile conice înaintea lui Apolloniu, dar el nu și-a publicat lucrarea. Prietenii lui o cunoșteau și, atunci cînd a apărut cartea lui Apolloniu, aceștia l-au acuzat că l-a plagiat pe Arhimede. Injuria era neîntemeiată, căci Apolloniu a declarat în prefața cărților sale că el nu a urmărit alta decît să sistematizeze și să generalizeze toate descoperirile făcute anterior. Se pare că Apolloniu nu a uitat această jignire și nici nu a iertat-o. De aceea,

atunci cînd au apărut cărțile lui Arhimede *Despre măsurarea cercului* și *Despre denumirea numerelor*, Apolloniu le răspunde printr-o lucrare intitulată batjocoritor *Okitókion* (Nașteri rapide). Lucrarea aceasta este astăzi pierdută. Ea e cunoscută doar din comentariile lui Eutocius asupra operelor lui Arhimede. Eutocius observă că Apolloniu stabilește acolo un mijloc mai precis decît al lui Arhimede pentru calcularea valorii aproximative a numărului π, cu patru, și nu cu două zecimale exacte, iar în legătură cu problema numerației Apolloniu opune metodei octadelor, imaginată de Arhimede, un sistem de numerație mai comod cu miriade. Acest nou sistem nu se deosebește de al nostru decît prin aceea că în fiecare clasă sînt patru ordine (unități, zeci, sute și mii), în loc de trei. Aici zecile de mii sînt unitățile de ordinul întîi din clasa imediat următoare, pe cînd în sistemul actual miile sînt unitățile clasei superioare. În acest sistem, miriada de miriade, adică octanta lui Arhimede, este numită miriadă dublă, iar $10\,000^3$ — miriadă triplă ș.a.m.d.

— Extraordinar! Acum bănuiesc care-i dezlegarea misterului problemei taurilor! am exclamat fără să vreau.

— Într-adevăr, aveți dreptate, mi-a răspuns tînărul prieten, deoarece versurile de la începutul problemei, și mai ales acelea care fac introducerea la partea a doua, au o notă sarcastică și parcă vizează pe cineva. Îl vizau desigur pe Apolloniu.

— Vedeți, doamnă, a spus prietenul meu, încercînd o mină de om necăjit. Dumnealor discută acum numai între ei, de parcă noi am fi cu totul străini de această problemă!

La această observație am rîs satisfăcuți, iar mucalitul meu prieten a adăugat:

— Totuși, să știți că nu vă las ultimul cuvînt! Așa că vă mai citesc ceva. Iată ce viu și plastic și-l imaginează S.I. Lurie, în cartea pe care a scris-o despre Arhimede, pe autorul problemei taurilor cînd i-a trimis problema lui Eratostene, ca o provocare față de Apolloniu: „Credeai că ai să mă întreci în arta numerației? Ceea ce ai făcut în *Okitókion* nu reprezintă adevărata înțelepciune! Încearcă să rezolvi pro-

blema propusă de mine și atunci voi recunoaște că ești învingător!"

Replica ne-a plăcut mult și toți trei ne-am arătat satisfăcuți, prin mulțumirile adresate prietenului meu, ceea ce l-a pus în încurcătură.

— Priviți, deasupra Runcului cerul s-a înseninat, a spus, fericit că a găsit un divertisment.

— Era și natural, l-a ajutat colega lui. Minunîndu-se de sîrguința noastră, norii au vrut să ne aplaude, dar, cînd au încercat să o facă, s-au risipit!

— Ce-ar fi să o luăm într-acolo, a propus prietenul Teodor. V-aș arăta eu pe unde alergam după veverițe, cînd m-a adus tata aici la liceu.

— Încaltea să ne spui și cum te-a urecheat profesorul tău de latină din cauza lor!

— Nu era la ora de latină, ci la cea de greacă. Și după cum vezi, plătesc acum ceea ce i-am rămas dator atunci, cînd din cauza unei veverițe cu ochișorii sperioși și cu coadă zbîrlită nu-mi învățasem paradigmele!

PROBLEMA FLORENTINĂ

SAU POVESTEA UNUI ÎNSTRĂINAT

Cînd am pornit de acasă ca să urcăm Tomnatecul, Cîmpulungul nu se trezise din somn. Răsăritul soarelui ne-a prins pe cînd intram în pădurea Deci.

— Cu cîtă bucurie și căldură te primește pădurea asta de îndată ce i-ai trecut pragul! Plescăitul zburdalnic al acestei cascade în miniatură, cîntecul păsărelelor răsunînd dintre ramurile brazilor, îngrijorați parcă să nu ne intimideze cu înfățișarea lor maiestuasă...

— Semn rău, m-a întrerupt prietenul meu. Ai început-o prea de dimineață cu sentimentalismele. Ori poate că ți se trage de la cartea pe care o citeai?

— S-ar putea, deși nu era vorba de vreun călduț conflict sentimental, cum îmi pare că presupui, ci de o problemă pe care aș dori chiar s-o discutăm.

— Anume despre ce?

— Despre înstrăinarea omului.

— Atunci spune-o lămurit, bădie, și nu mai umbla cu introduceri poetice. Înstrăinarea omului? Față de cine, de societate sau de el însuși? Fiindcă, dacă-i vorba de înstrăinarea omului față de el însuși, va trebui să ne abatem și prin astronomie că, de! În acest din urmă caz, biata ființă umană se simte singură în tot universul tocmai acum, cînd e așa de aproape să-și găsească prieteni și prin alte planete...

— Hai, lasă zeflemeaua, l-am oprit eu: Faptul că doi și cu doi fac patru, că așa a fost și cu 100 000 de ani în urmă și va rămîne la fel peste alți 100 000 de ani, indiferent dacă în trecut omul locuia prin păduri, caverne sau peșteri și dacă în viitor se va delecta făcînd excursii pe fundul oceanelor sau către circurile lunare, și că...

— Stai că iar te-ai înfierbîntat! Doi și cu doi nu fac, nu au făcut și nu vor face patru întotdeauna! Dacă pui într-o

cușcă doi iepuri cu doi lupi, doi și cu doi fac numai doi sau cel mult trei, dacă lupii sînt cumva prea sătui. Tot așa dacă amesteci doi litri de alcool cu doi litri de apă nu obții patru litri de rachiu, ci mai puțin. Vezi dar că trebuie să fii precis în afirmațiile pe care le faci, căci altfel sîntem înstrăinați de problema pe care ne-o punem!

— Și fără această precizare rămînea valabil ceea ce voiam să observ. Teorema lui Pitagora, despre care mi-ai spus că era cunoscută de egipteni și babilonieni cu mult înainte de a se naște Pitagora, nu va rămîne în forma în care o știm noi și peste milioane de ani de-acum înainte?

Prietenul meu a tăcut. Vorbind, nu băgasem de seamă cîtă măreție și prospețime era în pădurea pe care o traversam. De-abia acum, cînd am continuat drumul, fără să ne mai spunem ceva, pe nesimțite adînca ei liniște a pătruns în mine, ca o fericire. Am înțeles de ce prietenul meu n-avea chef de vorbă și i-am dat dreptate. Tîrziu, după ce am ieșit la cîmp și a văzut că drumul prin soare mă obosea, mi-a spus:

— După ce urcăm dealul, dăm iar de pădure, dar dacă vrei, o putem lua pe drumușorul acesta ca să facem un popas acolo sus, unde vezi brazii cei rari.

Am acceptat bucuros propunerea și în curînd eram pe dîmb.

— Cred că nici în rai n-ar putea fi mai bine, am spus, Între brazii de aici sîntem ca într-o căsuță cu cerul drept acoperiș. Uite fragi și afine! Mîncăm aici și tragem un pui de somn! Avem un covor de mușchi pe care ne putem întinde mai strașnic decît într-un pat. Tomnatecul îi așa de departe! La nevoie putem amîna urcușul pe mîine sau poimîine și să rămînem aici, nu vrei?

— Covrigaru-i covrigar, și pace! Ce înțelege el alta din excursie decît să mănînce bine, lăsînd ca amintire hîrtiile și cojile de ouă împrăștiate în toate părțile, să exclame mereu: vai! ce apă limpede, ce munte înalt, ce vedere strașnică... și să doarmă la umbră!

— Ei da, l-am înfruntat eu, n-am nici rezistența ta și nici sensibilitatea care au șlefuit-o în tine, din copilărie, dealurile sau pădurile cu tăcerile, pîraiele cu șușotitul.

Priveliștea care se deschide de pe un vîrf de munte este pentru tine o necesitate sufletească, pe cînd pentru mine un ideal, a cărui realizare o pot amîna, dacă efortul e prea mare. Tu cauți un orizont larg deschis, pe mine mă satisface și fundul de căldare, cum spui tu. De aceea priveliștea de aici e pentru mine încîntătoare. Așa văd munții verzi, cu iarba și pădurea fiind și eu aici, lîngă ei. Săptămîna trecută, cînd ai reușit să mă urci pe Rarău, munții mi-au apărut îndepărtați și estompați. Frumusețea de pe Rarău era înfricoșătoare și depășea puterea mea de a o suporta. Mă temeam, nu știu de ce, dar acest sentiment de teamă s-a amestecat tot timpul cu acela de admirație și adorație și parcă-mi tăia răsuflarea. Mai ales în dimineața aceea cînd ne-a înconjurat ceața din toate părțile și pierdusem siguranța pămîntului solid de sub picioarele mele, știi cît eram de înspăimîntat?...

— Știu, știu, a rîs prietenul meu, am ghicit după graba cu care mi-ai apucat mîna. Parcă erai un copil...

— Chiar eram, fiindcă trăiam pentru prima oară asemenea clipe.

— N-am dreptate cînd te fac covrigar?

— Ba ai. De aceea nici nu te contrazic, numai că aș dori să mă înțelegi.

— Ei, asta nu! Ești prea bătrîn, dragul meu, ca să te mai alinți, a rîs el întinzîndu-se pe spate, în timp ce eu mă sileam să așez mîncarea pe iarbă.

Cînd m-am trezit din somnul care cred că ne-a cuprins pe amîndoi, eram un om fericit. Priveam cerul și prin minte îmi alergau versuri. Așa că, atunci cînd prietenul meu m-a întrebat: „cum stai cu înstrăinarea, bădie?" am răspuns nedumerit: „care înstrăinare?"

— Ei asta-i! Înstrăinarea, alienarea sau însingurarea de care nu te mai puteam desprinde în zori la pîrîu! Problema ceea a înstrăinării despre care un matematician habar nu are, fiindcă în matematică teorema lui Pitagora a rămas și va rămîne aceeași pînă la sfîrșitul veacurilor.

Atunci mi-am adus aminte.

— Drept să-ți spun, am răspuns, mi se pare că de atunci de cînd am vorbit au trecut ani. Străbătînd pădurea am atins

culmea liniștii, iar aici am aflat raiul; lasă-mă așa, că nu vreau să mă mai întorc pe pămînt.

— Ia-o mai încet, dragul meu. Socot că ești cel mult în purgatoriu, căci păcatele tale cele multe și grele nu te-au lăsat să urci pînă la rai: colo sus, pe coama Tomnateculuí... Acolo da, nu ți-aș fi tulburat tăcerea...

— Dar eu am găsit-o și aici. Uite, mărturie mi-s versurile lui Blaga, de care nu mă pot desprinde:

„Doinind aș privi șapte ani
Spre cerul cu miei luzitani
De nu m-ar găsi unde sînt
Neliniștea morii de vînt..."

— Va să zică, ținînd seamă de versurile care urmează, am ajuns să fiu eu *astrul* „văzut nevăzut din albastru" care ți-a supt fericirea liniștii? Bravo, bădie! sus m-ai mai ridicat!

— Să știi că nu mă impresionează! Vreau să privesc mai departe „mieii luzitani". Dar dacă ai gust de vorbă, vorbește și te voi asculta.

— Am să vorbesc, fiindcă m-ai atacat azi-dimineață cu atîta vehemență și așa de fără temei, încît e necesară o lămurire. Ca să-ți arăt că te-ai cam pripit făcînd acele afirmații, m-am gîndit să-ți povestesc un caz autentic de înstrăinare, pe care-l cunosc din istoria matematicilor. Faptul s-a petrecut pe la sfîrșitul veacului al XVII-lea; vei vedea astfel că problema înstrăinării nu-i de loc o problemă a omului modern, că ea a existat și în trecut. Cazul despre care am să-ți vorbesc avea atunci un titlu foarte romantic. „Problema florentină", și azi puțini mai cunosc tragedia sufletească ascunsă în acest titlu. În cursurile actuale de analiză matematică, amintirea s-a transformat într-o „aplicație", numită *problema lui Viviani*, în care este vorba despre calcularea ariei suprafeței mărginite de curba de intersecție dintre o sferă și un cilindru circular drept, tangent în interiorul ei.

— Dragă Toa, de data aceasta să știi că nu-ți mai merge! m-am repezit eu. Nu fiindcă mi-ai distrus liniștea pe care o atinsesem datorită ție. Nu, ci fiindcă văd că ai de gînd să folosești un șiretlic ca să aduci vorba despre o chestiune de matematică! Așa ceva nu admit! Nu te-am ascultat eu cu

plăcere oți de cîte ori mi-ai povestit cîte ceva din istoria matematicilor? De unde dar acest procedeu infam? Ești în stare să pui într-o oală problema înstrăinării omului și problema calculării unei arii, numai pentru simplul motiv că această problemă s-a numit cîndva *florentină*? Asta-i curată panglicărie și nu o admit, oricît de covrigar oi fi eu. Nu spun că problema ta nu m-ar interesa! Mai ales fiindcă, dacă am înțeles eu bine, ea îmi amintește de zilele copilăriei, cînd mă punea mama să-i scot sîmburii din caisele necoapte, ca să facă dulceață. Găuream caisa de la un capăt la altul cu un tub de tablă, sîmburele intra în tub și pe suprafața caisei rămîneau două găuri sau uneori numai una, cînd tubul aluneca prea aproape de coaja caisei. Desigur, caisa nu avea formă sferică, dar dacă s-ar repeta experiența și s-ar găuri un măr chiar pe lîngă coajă, cred că pe suprafața mărului ar apărea curba despre care vorbești.

— Exact, și figura ar semăna cu cifra 8, un fel de 8 răsucit în așa fel ca el să fie așezat pe sferă, punctul de încrucișare fiind acela în care tubul tău cilindric atinge mărul.

— Foarte bine. Pe 8 n-ai decît să-l răsucești cît poftești, dar să nu mă faci să cred că poți să-l răsucești ca pe o rufă udă și să storci din el problema înstrăinării unui matematician!

Prietenul meu a început să rîdă în hohote, apoi mi-a spus:

— Pe 8 n-am să-l răsucesc decît atît cît trebuie ca să stea lipit de sferă. Dar dacă ai avea răbdarea pe care îmi închipuiam că ai cunoscut-o o dată cu mult lăudata ta liniște sufletească, atunci ai putea afla cum a ajuns Vincenzo Viviani, un mare geometru florentin din veacul al XVII-lea, să constate formulînd problema care te-a revoltat că s-a înstrăinat de știința pe care o adora și-i era cea mai apropiată și dragă!

— Dacă-i așa, să știi că nu mai spun nimic. Am pus punct și te ascult.

— Numai să nu fie „punct și de la capăt", a ripostat prietenul meu, aprinzîndu-și țigara și întinzîndu-mi-o să o aprind și pe a mea, înainte de a începe povestea.

Fig. 9
Vincenzo Viviani

— În 1622, cînd s-a născut Viviani, Descartes avea 26 de ani, iar Fermat 20. Nici unul dintre ei nu publicase încă vreuna dintre lucrările ce aveau să schimbe orientarea cercetărilor matematice. Numai Galilei, atunci de vreo 58 de ani, stîrnea furtuna în jurul lui. E drept că nu publicase încă acele vestite *Dialoguri asupra celor două sisteme mari ale lumii*, care-l vor conduce la închisoare și la abjurarea operei sale — arsă la Roma —, aceasta se va întîmpla mai tîrziu, peste 10 ani, dar și pînă acum făcuse destule! De zece ani, de cînd construise luneta și avusese ideea să o îndrepte spre cer, oamenii știau că *există pete în Soare*, că *Soarele nu-i fix, ci se rotește în jurul axei sale*, că *Jupiter are sateliți* și că *Pămîntul este tot o planetă* ca și Jupiter, așa cum a susținut Copernic! Nici chiar misterioasele și temutele *comete* n-au fost cruțate; au devenit și ele obiect de rece cercetare științifică. După cum vezi, se frămîntau idei noi și se

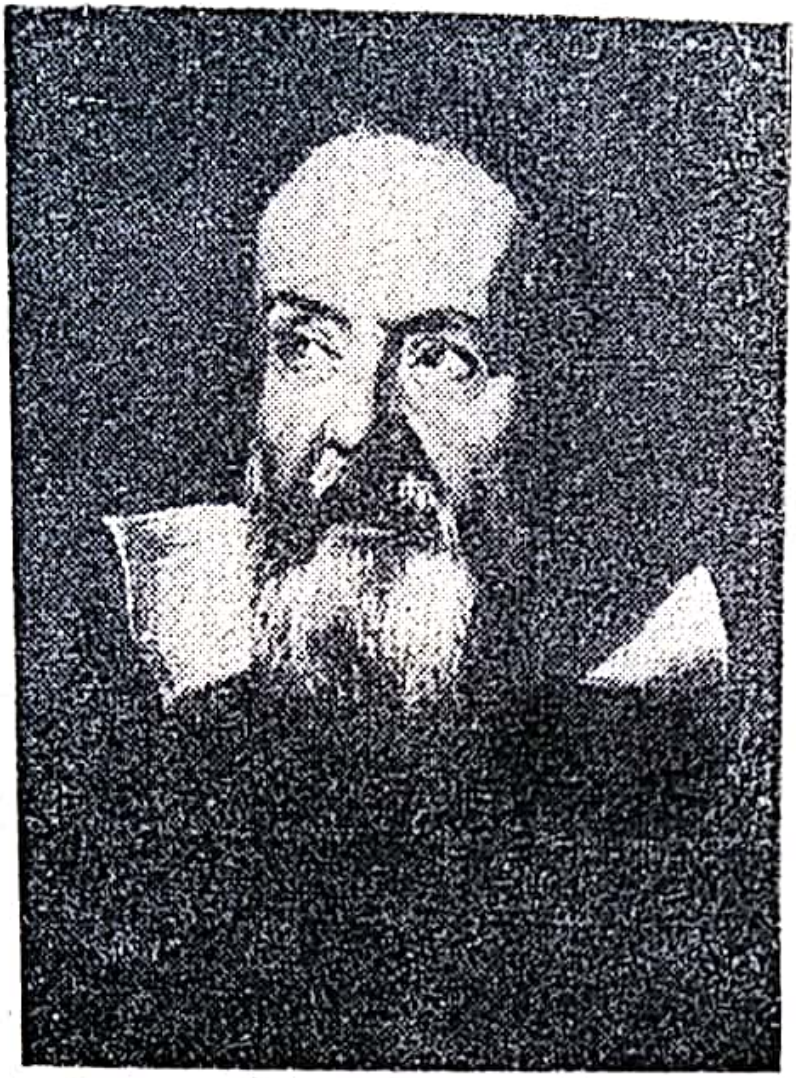


Fig. 10
Galileo Galilei

plămădeau concepții care le vor dărîma pe acelea ale scolasticii și ale inchiziției.

De tînăr, Viviani a arătat o mare pasiune pentru studii. La 16 ani a aflat de la un profesor de-al lui că nu există altă logică mai bună decît geometria, și astfel s-a trezit în el curiozitatea de a o cunoaște.

— Cine nu știe cum era organizat învățămîntul în veacul al XVII-lea s-ar putea întreba ce a putut învăța el pînă la 16 ani, dacă nici nu auzise de geometrie?

— Cel ce nu știe ar putea-o face, dar tu știi prea bine că în veacul al XVII-lea învățămîntul avea caracter scolastic fiind condus și întreținut de călugării iezuiți. În școli se preda limba și literatura latină, considerată fiind ca limbă universală, apoi teologia, logica și filozofia lui Aristotel. Numai în unele universități particulare, laice, cu tendințe de modernizare a învățămîntului, se învăța geometria.

Clemente Settini, singurul geometru din toată Toscana, ținea la Florența un curs particular de matematică. Pe acesta l-a urmat Viviani.

— Bine, dar sîntem în 1638. Or, la această dată mai trăia și Galilei!

— Da, Galilei trăia, dar era după proces. Locuia izolat de lume, într-o vilă din Arcetri, pe care o numea *închisoarea* lui, cum de fapt și era, o dată ce îi erau controlate vizitele pe care le primea și drumurile pe care ar fi vrut să le facă. Pe lîngă asta era și orb. Pierduse, după cum spunea el, *ochii care-i descoperiseră un cer nou*.

Vincenzo Viviani a urmat cursurile lui Clemente Settini cu atîta interes și înțelegere, încît profesorul lui l-a recomandat la curtea marelui duce Leopold de Medicis, pasionat și acesta de matematici și de fizica cea nouă a lui Galilei. Astfel, Vincenzo a fost invitat la curte și supus unui examen din materia care forma primele patru cărți ale *Elementelor* lui Euclid. Ca examinator a avut pe ducele însuși, împreună cu alți curteni, oameni de știință. Viviani a răspuns cu atîta ușurință la toate întrebările puse de examinator, încît a trezit îndoiala ducelui. El a susținut că asemenea răspunsuri precise ar putea fi datorate și unei foarte bune memorii. De aceea s-a hotărît ca el să mai treacă o probă scrisă. Pentru tînărul Viviani, îndrăgostit cum era de geometrie, problema propusă a fost doar un nou prilej de bucurie. Răspunsul lui a uluit și de data aceasta comisia. Marele duce îi dă atunci o bursă, din care să-și procure cărțile necesare și sfătuiește pe tatăl lui Viviani să-l lase să-și continue studiile matematice.

— Pe de o parte, bursa era necesară, chiar dacă Viviani ar fi avut cu ce trăi, căci pe atunci cărțile erau extraordinar de scumpe, și, pe de altă parte, numai prin acordarea ei, putea rămîne sub protecția marelui duce de Toscana.

— Într-adevăr, protecția ducelui îi asigura lui Viviani posibilitatea de a continua studiile. Examenul avusese loc la Livorno. Peste cîteva luni, cînd curtea a revenit la Pisa și marele duce de Toscana îl vizitează pe Galilei în Arcetri, i-l recomandă pe Viviani. În urma recomandației, Viviani a obținut și permisiunea Inchiziției de a-l vizita pe Galilei.

Galilei era o fire sociabilă. În ciuda calamităților prin care trecuse, îi plăcea să discute cu tinerii care puteau obține permisiunea de a-l vizita, să le puie probleme greu de rezolvat sau să rezolve el problemele pe care aceștia i le puneau. Or, Viviani, prin firea lui modestă și plină de entuziasm, prin perspicacitatea și bogăția cunoștințelor, trebuie să-i fi plăcut îndeosebi lui Galilei. După cum ți-am mai spus, Galilei orbise. La scris îl ajuta un elev al său, Dino Peri, dar tocmai pe atunci acesta se îmbolnăvise destul de grav și a trebuit să plece de la el. De aceea, curind după ce Galilei îl cunoaște pe Vincenzo Viviani îl primește în casa sa, ca oaspete și elev. Numai că, în calitate de elev al lui Galilei, nu trebuie să-ți închipui că modestia lui Viviani ajungea pînă la docilitate. Din contra.

— Ce vrei să spui?

— Că Viviani nu pregeta să-și arate nedumerirea, atunci cînd era necesar. Să-ți dau un exemplu care se cunoaște din scrisorile rămase de atunci. Știi probabil că vestitele *Dialoguri asupra științelor noi* au fost tipărite în Olanda în 1638. Deși la Florența au ajuns abia peste un an, Viviani le cunoaște chiar din 1638 și de atunci începe să le studieze. Cred că nu trebuie să-ți mai spun cîtă vîlvă și cîtă admirație a stîrnit cartea lui Galilei, nici cu cîtă curiozitate și pasiune a fost citită de toți marii savanți din lume. Însă, dintre toți, numai acest băiețaș de 16 ani găsește în partea a treia a cărții o greșeală. Anume, cînd vorbește de mișcarea natural accelerată, Galilei afirmă că viteza unui corp pe un plan înclinat nu depinde de înclinarea planului pe care cade. Viviani nu ezită să-i arate lui Galilei îndoiala sa și, în cele din urmă, acesta îi dă dreptate elevului său și deci rectifică dialogul. Apoi, potrivit obiceiului, îl comunică diferiților învățați și prieteni prin scrisori. Una dintre aceste scrisori o adresează, în 1639, lui Benedetto Castelli și, după cît îmi aduc aminte, are următorul cuprins: „În filozofie îndoiala este mama invențiilor, căci ea croiește drumul către adevăratele descoperiri. Opoziția și observațiile pe care mi le-a făcut tînărul Viviani, oaspetele și discipolul meu, în legătură cu principiul admis de mine despre mișcarea accelerată pe care el a studiat-o cu multă pricepere, m-au obligat

să meditez asupra lui pentru a mă convinge de adevăr și astfel am reușit, spre bucuria mea și a lui, să stabilesc o demonstrație pe care am comunicat-o și altora. El a făcut o redactare a ei pentru o nouă ediție a lucrării, fiindcă eu, complet lipsit de vedere, m-aș fi încurcat printre notațiile și figurile respective..."

— Și în noua ediție dialogul a fost modificat?

— Desigur. Această nouă ediție a apărut abia după moartea lui Galilei, îngrijită de Viviani.

— Știi ceva? Fiindcă mi-ai vorbit de Galilei, ce ar fi să facem o paranteză ca să discutăm piesa lui Bertolt Brecht *Viața lui Galilei*? Ne întoarcem după aceea la Viviani. Tot a fost azi o zi de întoarceri și popasuri neprevăzute, unul în plus nu strică. Am văzut teatrul lui Brecht la tine în bibliotecă și sînt sigur că l-ai citit. Cum găsești această piesă?

— Mi-e greu să-ți spun. Un om de litere privește lucrurile cu totul altfel decît mine. Impresiile mele sînt pur personale și nu au nici o legătură cu incontestabilele calități ale piesei. Ele nu-s decît reacția stîrnită de unele fapte care nu concordă cu cunoștințele mele despre viața lui Galilei!

— Dar asta vreau și eu, căci părerile specialiștilor le cunosc. Această piesă este, prin tema sa, excepțional de interesantă. Bertolt Brecht a știut să trezească pe spectator din inerția lui de spectator, făcîndu-l să ia parte, alături de *erou*, care nu mai este un *erou*, la frămîntările lui sufletești. De aceea s-au și stîrnit atîtea discuții în jurul teatrului brechtian... Îți aduci aminte, cred, de ultima convorbire dintre Galilei și Andrea, cînd acesta îi spune elevului său: „Timp de cîțiva ani am fost la fel de tare ca stăpînitorii. Și cu toate acestea le-am predat știința mea, lăsînd la voia lor să uzeze sau să nu uzeze de ea, ba chiar să abuzeze de ea după cum cereau interesele lor. Acum înțeleg că mi-am trădat menirea. Un om care face ce am făcut eu, nu mai are ce căuta în rîndul oamenilor de știință..." E zguduitoare această mărturisire și nu-mi închipui vreun spectator care să rămînă indiferent cînd se dezlănțuie această furtună interioară.

— Ai dreptate și regret că m-a impresionat prea puțin acest pasaj. Asta fiindcă eu îl cunosc altfel pe Galilei. Vezi, impresiile mele sînt acelea ale unui migălos cercetător de bibliotecă, care, din cauza detaliilor, nu se poate ridica la o privire de ansamblu. Ce să fac? Mă sîcîie orice fapt care nu-i așa cum l-am găsit printre hîrțoage. De aceea Brecht, care și-a pus problema unei documentări științifice și se dovedește capabil de a o stabili, nu mă poate mulțumi cu jumătățile lui de măsură! Cînd se cunosc amănunte strălucitoare din viața lui Galilei, la ce bun să se inventeze altele mai palide? De pildă, chiar în această fictivă întîlnire cu Andrea, întîi nu văd de ce nu s-ar fi precizat că ea a avut loc în *Arcetri, lîngă Florența*, localitate rămasă celebră tocmai prin faptul că în ea a locuit Galilei, în loc de acel vag *la țară, în apropierea Florenței*. Apoi, cînd Galilei îi spune unde se află copia *Dialogurilor asupra științelor noi*, Andrea scoate copia din glob și exclamă plin de uimire și încîntare: — *Vestitele „Discorsi"*!

— Exact, perfect. Nici nu se poate mai natural; ce putea spune altceva Andrea? Ele erau *vestite* încă înainte de a se tipări. Nu mi-ai spus tu singur că Galilei răspîndise cartea aceasta, mai bine-zis primele două zile, în mai multe copii, care circulau încă din 1636 printre prieteni? Sau nu știi oare că Discorsi se traduce în românește prin Dialoguri? Dacă ai fi căutat în dicționarul italian-român, ai fi aflat aceasta!

— Probabil. După cum vezi, obiecțiile mele nu au nici o noimă și le retrag.

— Ba nu, te cunosc prea bine. Nu cedezi tu așa de ușor. Explică-mi ce nu te-a satisfăcut?

— Află că titlul *Discorsi*, sub care e cunoscută azi celebra lucrare a lui Galilei, nu corespunde cu adevăratul nume al operei, nume pe care i-l dăduse atunci autorul. Editorul Elzevier, care a tipărit lucrarea în Olanda, i-a pus acest titlu fără știrea și permisiunea lui Galilei. Există scrisoarea lui Galilei din 1638 adresată prietenului său din Paris, Elia Diodati, în care îl roagă să facă tot ce se poate ca să schimbe acest titlu. „Am rămas mirat și supărat de libertatea pe care și-a luat-o dl. Elzevier de a schimba

titlul cărții mele", îi scria Galilei. Acum—știind aceasta—te rog să-ți imaginezi ce impresie mi-a putut face mie exclamația lui Andrea! Ar fi fost de ajuns să-mi amintesc de impresia lui Galilei cînd a aflat pentru prima oară de acest titlu, lăsînd la o parte că faptul s-a petrecut nu înainte, ci un an după tipărire, și deci că *Andrea nu avea de unde cunoaște acest titlu!*

— Da, la tine e o deformare profesională. Noroc că sînt prea puțini aceia care cunosc și pot sesiza asemenea amănunte, fără nici o importanță artistică!

— Sînt de părerea ta! Dar, fiindcă am pornit pe panta aceasta, am să-ți mai semnalez încă vreo două-trei amănunte, tot așa de fără importanță artistică, care m-au sîcîit. De pildă, trecerea manuscrisului peste graniță de către Andrea în 1637. Lucrurile s-au petrecut cu totul altfel, deși numai puțin romantic. Anume, în 1636, și nu 1637, una dintre copiile *Dialogurilor* a fost predată de Galilei contelui de Noailles, fost elev al său pe cînd era la Padova, căruia îi va și dedica apoi această carte. Contele de Noailles, ambasador al Franței la Roma din 1634, îl admira mult pe Galilei și, profitînd de calitatea lui oficială, a încercat chiar să-l salveze în timpul procesului, însă nu a reușit. În 1636, cînd părăsește Italia, obține o autorizație specială de la Papă ca să-l întîlnească pe Galilei. Întîlnirea are loc și, cu această ocazie, Galilei îi înmînează un manuscris al *Dialogurilor*, ca acesta să le publice. Ei convin, așa cum remarcă și Brecht, ca Galilei să invoce scuza că tipărirea s-a făcut fără știrea lui. Aceasta a fost în 1636. Tot în 1636, Galilei tratează despre tipărirea cărții sale direct cu editorul Elzevier, care se afla atunci la Veneția. Prin intermediul altui elev de al său, Galilei îi trimite și lui o copie a lucrării, grăbindu-se chiar să termine și cuprinsul zilelor a treia și a patra, pentru ca manuscrisul să fie complet fiindcă cel dat lui Noailles cuprindea numai primele două zile. Vezi? Acestea s-au petrecut în 1636 și m-a supărat că Brecht le pune în 1637, cînd, la această dată, cartea era gata imprimată. Și încă ceva! Cred că nu ar fi fost de loc greu pentru Brecht să fi respectat adevărul, cel puțin în ceea ce privește societatea lui Galilei din ultimii ani ai vieții lui. Se știe bine că în

preajma lui se aflau atunci cei doi elevi de care ți-am vorbit și, uneori, fiul lui Galilei, Vicenzio, dar nicidecum Virginia, care era la mănăstire. Scrisorile lui Galilei din acea vreme arată precis preocupările lui, îndreptate numai și numai spre cercetări științifice. Singura sa dorință era să poată transmite cît mai multe *cunoștințe* : „Creierul meu neliniștit nu poate sta fără să macine incontinuu...", spune el într-o scrisoare. Iar în ianuarie 1633, cu cîteva zile înainte de a pleca la Roma ca să fie anchetat de inchiziție — procesul se termină în iunie — îi scrie așa lui Elia Diodati: „În afară de alte neplăceri, mi-a căzut și cea mai mare, de a nu putea progresa în pregătirea celorlalte opere ale mele și, în particular, a aceleia despre mișcare, pentru a o publica cît timp sînt încă în viață". Vezi cum privește el faptul că trebuie să plece la Roma? El bănuiește că nu-i va fi de loc ușor acolo, dar nu se plînge de asta, căci nu-l interesează. Nu acesta-i principalul, ci faptul că *plecînd* nu mai are liniștea necesară ca *să progreseze în pregătirea celorlalte opere*. Galilei pe care îl cunosc eu a fost plin de energie și a dorit să lucreze pînă în ultima clipă. Problema abjurării a privit-o, cred, cu aceiași ochi ca odinioară Aristotel. Aristotel a preferat să fugă din Atena, unii ar zice ca un laș. El a spus că o face — și sînt sigur că așa a fost — fiindcă nu vrea să apese pe atenieni rușinea de a-l fi omorît și pe el, așa cum au făcut cu Socrate! Așa trebuie să-l fi văzut pe Galilei și Viviani. Niciînd Galilei n-a înclinat capul în fața lui, socotindu-se *nedemn de a face parte din tagma oamenilor de știință!* Tocmai această atitudine demnă și dîrză a lui Galilei a putut lega pe tînărul Vincenzo de uriașul orb din Arcetri cu asemenea legături sufletești, încît în lunga viață pe care va trăi-o Viviani, titlul de „ultim elev al lui Galilei" să i se pară cel mai glorios din cîte le-a avut și să-l afirme pînă la sfîrșitul vieții, deși nu se putea plînge că nu a avut destule alte titluri de glorie! Ce plăcere mi-ar fi făcut să-l aud pe Galilei vorbind, îndată după abjurare, cu Thomas Hobbes, căci se știe că acesta l-a vizitat atunci, sau cu tînărul John Milton, care avea 30 de ani cînd a venit, în 1638, la Arcetri ca să-l întîlnească pe Galilei, sau cu filozoful francez Pierre Gassendi, care îi scria în 1632, după ce

primise de la Galilei un exemplar din *Dialogul asupra celor două sisteme* (fig 11), cam așa: „Vă rog, nu numai în numele meu, ci și al altora, să nu ne faceți să lîncezim în așteptarea rezultatelor despre corpurile care cad cu viteză neegală...“ Pe acest Galilei îl cunosc și pe acest Galilei aș fi vrut să mi-l prezinte Brecht. Nu mă tem că, folosind aceste date, Galilei ar fi fost în pericol să se transforme în erou! Putea *rămîne om* și chiar dacă ar fi discutat cu acești oameni, în loc să-l aud discutînd cu Virginia cum să gătească cele două gîște pe care i le-a trimis un necunoscut! Eu nu cred că vreun admirator s-ar fi încumetat să-i trimită lui Galilei *două gîște*, fiindcă avea cu ce trăi, ba chiar avea posibilitatea să primească oaspeți în casa lui pentru vreme îndelungată, așa cum știm că a fost cazul lui Viviani. Dar destulă vorbă!

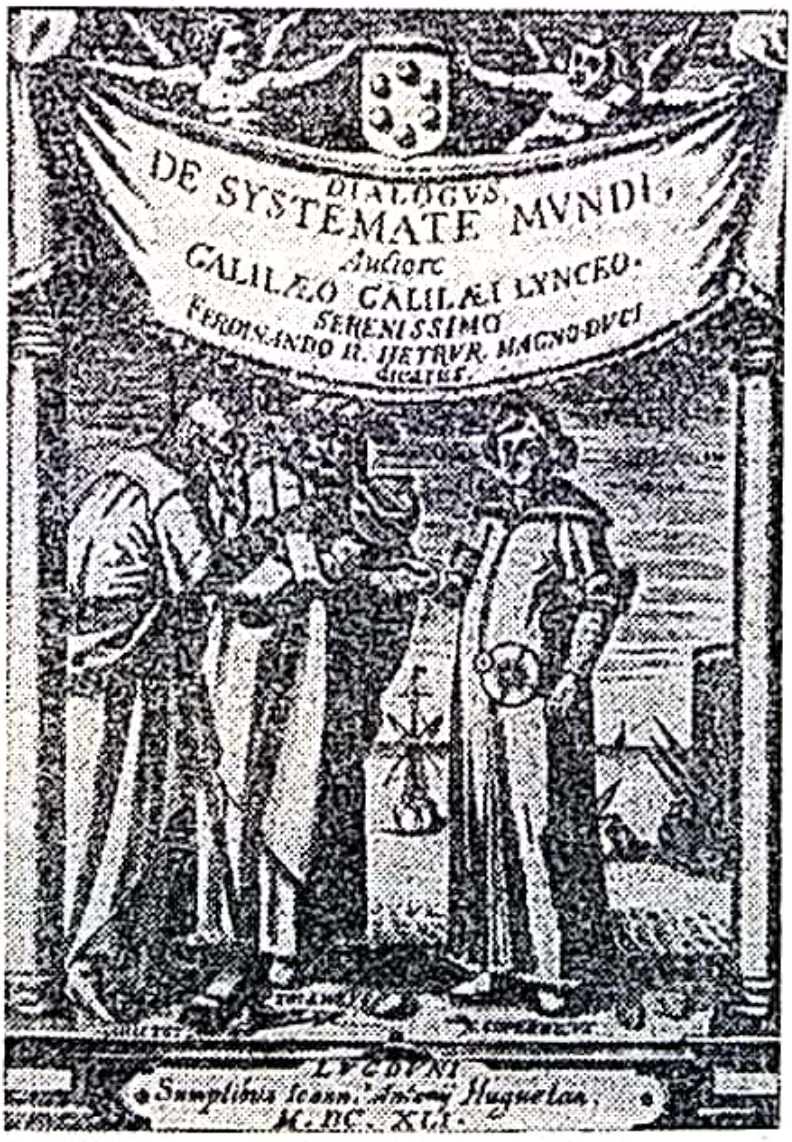


Fig. 11

Ți-am spus și eu niște amănunte care n-au nimic comun cu tema lui Brecht.

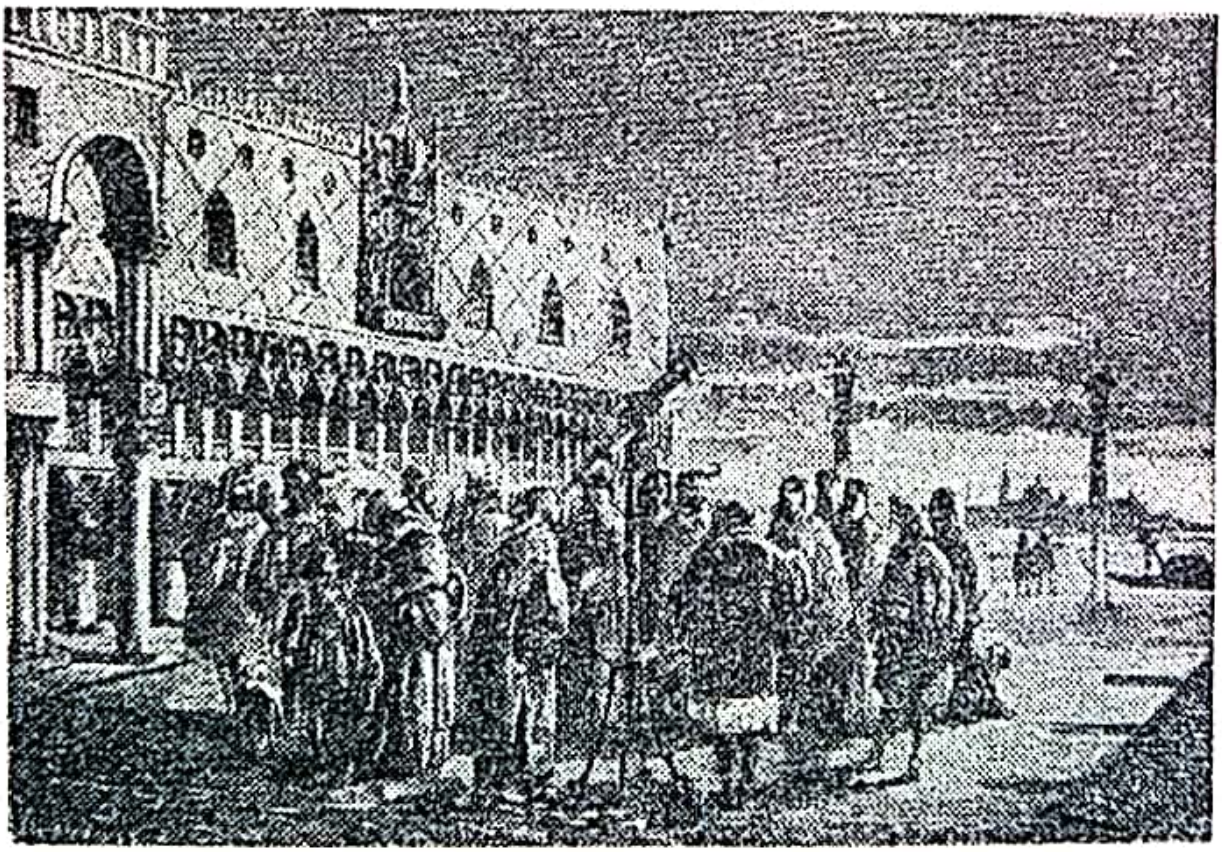
— Da, Brecht a făcut o mare greșeală că nu ți-a cerut să colaborezi cu el!

— Ți-a venit apa la moară, n-am ce spune!

— Și încă cum! Din belșug! De aceea, plin de generozitate, te rog să închidem paranteza și să revenim la Viviani!

— Nu-i nevoie s-o închidem, căci de fapt era închisă gata. Prin cele ce ți-am spus, am căutat să-ți arăt cum a putut stîrni Galilei *admirația*, și nu *mila* lui Viviani. Niciodată tînărul Viviani nu a văzut în fața lui pe altcineva decît pe marele om care știa să citească *cu ochii lui cei orbi* tainele naturii pe care el, Vincenzo, zadarnic o privea cu ochii limpezi! Și Vincenzo se silea să îndeplinească slujba de a înregistra cît mai fidel cele ce observa Galilei. O dată numai, el, care nu putea să vadă, l-a silit pe Galilei să se întoarcă și să privească mai atent la una dintre acele taine pe lîngă care trecuse prea repede! De atunci, deși Vincenzo

Fig. 12
Galilei arătînd veneţienilor sateliţii lui Jupiter



Viviani nu împlinise 17 ani, iar Galilei trecuse de 76, între acești doi pasionați iubitori de știință, bariera vîrstei a fost desființată. Dar Viviani înțelegea că ajutorul pe care i-l putea da el lui Galilei ca să-și ducă la capăt lucrările începute era prea mic. Galilei avea nevoie de un om format, căruia el să-i schițeze doar ideile sale, iar acela să le desăvîrșească. Acest om avea să fie Evangelista Torricelli, cercetător plin de calități și el însuși autor al unei lucrări despre mișcare, lucrare ce fusese inspirată de descoperirile lui Galilei. I-a fost recomandat de către Benedetto Castelli, prietenul lui Galilei, cînd acesta a venit să-l viziteze în 1641. Evangelista Torricelli, cu 14 ani mai mare decît Viviani, a venit și s-a stabilit la Arcetri în octombrie 1641, dar colaborarea a fost de scurtă durată, căci Galilei moare în ianuarie 1642.

Ei au început doar să lucreze, schițînd împreună conținutul părților intitulate „Ziua a cincea și a șasea". Abia după 33 de ani de la moartea lui Galilei, Viviani va publica cuprinsul zilei a cincea. Amintirea acelor clipe de lucru va evoca-o Vincenzo Viviani în biografia lui Galilei, pe care a compus-o mai tîrziu. Din ea se știe că uneori lua parte la aceste ședințe de lucru și fiul lui Galilei, Vincenzio, căruia Galilei i-a expus planul unui orologiu cu pendulă. Deși Vincenzio Galilei era un talentat experimentator, el nu a reușit să ducă pînă la capăt această invenție. De altfel, nici nu a mai trăit decît 7 ani după moartea tatălui său.

— Mi se pare că meritul acestei construcții îi revine lui Huyghens, nu?

— Exact.

— Și ce a făcut Viviani după moartea lui Galilei?

— Torricelli a stat numai trei luni în casa lui Galilei, dar acest timp a fost de ajuns ca să se închege o prietenie sinceră între el și Viviani. După moartea lui Galilei, marele duce Ferdinand îl invită pe Torricelli să rămînă ca profesor de matematici și totodată succesorul lui Galilei la Academia sa, iar pe Viviani îl numește prim-matematician al curții. Așadar, ei au continuat să lucreze împreună. Pe de o parte, au redactat lucrarea lui Galilei și, pe de altă parte, Viviani îl ajută pe Torricelli în toate experiențele de fizică

Fig. 13
Evangelista
Torricelli

pe care acesta le făcea. Printre altele, el ia parte, în anul următor, la descoperirea barometrului de către Torricelli.

— Într-adevăr, îmi amintesc că Torricelli a descoperit barometrul. Văd că ai fixat o dată, 1643. Știi poate cum a ajuns la această descoperire?

— Povestea e interesantă. Fîntînarii marelui duce din Florența căutau să construiască o pompă aspiratoare care să ridice apa la o înălțime mai mare decît 32 de picioare. Pe atunci nu se știa care-i forța ce urcă apa în corpul unei pompe și o menține acolo. Ei au construit pompa, dar apa nu s-a urcat mai sus, și atunci au venit la Galilei să-l întrebe unde-i greșeala. Faptul că apa nu se urca mai sus de

32 de picioare era în contrazicere cu principiul admis pe atunci că „natura are oroare de vid". Galilei demonstrase că aerul este greu, dar nu s-a gîndit să folosească acest fapt ca să explice insuccesul grădinarilor. Se spune că, nedumerit, le-ar fi răspuns foarte vag că, „natura nu are oroare de vid decît numai pînă la înălțimea de 32 de picioare". Preocupat de această problemă, Galilei o încredințează lui Torricelli, dar acesta stabilește răspunsul abia la un an după moartea lui, bazîndu-se tocmai pe descoperirea lui Galilei. Anume, el admite că nivelul atins de apă în pompa aspiratoare este echilibrat de către greutatea masei de aer care apasă pe suprafața exterioară. Discutînd acestea cu Viviani, amîndoi hotărăsc să repete experiența, folosind mercur în loc de apă, fiindcă în acest caz mercurul, fiind de 14 ori mai greu ca apa, va trebui să se ridice la o înălțime de 14 ori mai mică. Viviani construiește un tub de trei picioare, închis la un capăt, și procură mercurul. Cînd totul a fost gata, ei au umplut tubul cu mercur și apoi, ținîndu-l bine astupat cu degetul, l-au cufundat într-o cuvetă cu mercur. Și într-adevăr, mercurul din tub s-a coborît pînă la distanța prevăzută de ei. Tot Viviani a purtat apoi tubul cu mercur la diferite înălțimi și prin aceasta au stabilit un mijloc de măsurare a presiunii atmosferice, adică au construit barometrul.

Însă nici prietenia lui Viviani cu Torricelli nu avea să dureze prea mult. Acesta moare în 1647 și o dată cu el moare și libertatea lui Viviani. Avea atunci 25 de ani, o cultură matematică serioasă și o dragoste nemărginită pentru munca științifică. Dar prin moartea prietenului, multe dintre sarcinile pe care le îndeplinea Torricelli i-au fost încredințate lui. Ba, peste doi ani devenind vacant postul de profesor de matematici pentru pajii marelui duce, el a fost însărcinat și cu predarea lui, deși tot el se ocupa de instrucția științifică a tînărului principe moștenitor. Îți spun aceste amănunte fiindcă din ele se va dezvolta tragedia înstrăinării despre care n-am început încă să-ți vorbesc, fiindcă mai avem în fața noastră un Viviani tînăr — acum are abia 28 de ani — și acea poveste a înstrăinării se va dezlănțui fulgerător, cînd omul va avea 70 de ani!

— Cred că noi doi nu ne înțelegem asupra termenilor folosiți în discuție! Cum se va putea înstrăina de matematici cineva care lucrează tocmai în acest domeniu? După cîte îmi spui, văd că Viviani nu era numai un matematician, ci și un experimentator dibaci și oricîte sarcini i s-ar fi încredințat, ele erau din domeniul preocupărilor lui. Îți spun drept că nu mai înțeleg nimic!

— Bine. Ai răbdare și toate se vor lămuri. Reține că, pe lîngă multiplele lui ocupații, Viviani ajută pe marele duce să pună și bazele Academiei Florentine de Științe, academie care s-a numit, din 1651, „Accademia del Cimento", adică Academia de Fizică Experimentală, căci acesta e înțelesul cuvîntului *cimento*. Viviani este numit primul academician și, în această calitate, el propune și conduce executarea multor experiențe optice sau acustice, precum și construiri de lunete astronomice. Apoi, din 1652, adică atunci cînd împlinește 30 de ani, a fost numit și primul inginer al ducelui. În această calitate, avea să stabilească, împreună cu un alt renumit matematician și astronom, Domenico Cassini, din partea Papei, planurile de regulare ale cursului rîului Tibru, care provoca mari pagube prin inundațiile lui. Întîlnirea cu Cassini i-a prilejuit legarea unei noi prietenii, cu multe seri de observații astronomice petrecute împreună. Documentele rămase de atunci arată că Viviani a stabilit în 1665 efemeridele sateliților lui Jupiter, precum și observații asupra cometei care s-a ivit în acel an. Observațiile astronomice le-a continuat. Au rămas observațiile asupra unei eclipse de lună făcute în 1674, cînd trecuse de 50 de ani, deși din 1666 i-au mai fost suprimate unele dintre multiplele ocupații, ca să i se mai lase timp și pentru lucrările de geometrie începute încă de pe cînd era elevul lui Galilei.

— Trebuie să-ți dau dreptate, obligațiile de la curtea ducelui Ferdinand îi răpeau tot timpul liber. Mă mir că mai avea vreme să se gîndească și la lucrări științifice!

— Dacă nu ar fi existat primii 8 ani de intensă viață științifică, mai ales în domeniul geometriei, cred că Viviani ar fi fost curînd înecat de aceste multiple obligații și etichete

Fig. 14
Domenico Cassini

de curte. Însă așa, în cei trei ani petrecuți sub conducerea lui Galilei și în ceilalți cinci alături de Torricelli, el a avut răgazul să-și contureze unele dintre problemele pe care dorea să le rezolve și care l-au urmărit de atunci mereu. Însuși scrie în autobiografia sa că studiul conicelor l-a făcut pe cînd avea 22 de ani și că acei ani au fost singurii pe care i-a folosit în voie, pentru cercetare și ghicire...

— Cum pentru ghicire?

— Ajungem și acolo! Oricum, află că nu-i vorba de ghicire în palmă și nici în cafea! Cred că ți-am spus cîndva că, alături de Arhimede, Apolloniu a fost cel mai profund geometru al antichității. Opera lui principală, care se referă la studiul conicelor, a fost scrisă în 8 cărți. Această lucrare a fost cunoscută în Europa occidentală de-abia pe la mijlocul veacului al XV-lea. Anume pe la 1461, matematicianul german Regiomontanus, venind în Italia invitat de

Papă ca să reformeze calendarul, a găsit în biblioteca Vaticanului un manuscris cuprinzînd o traducere în limba arabă a primelor patru cărți ale lui Apolloniu. El traduce această lucrare în latinește pentru a o tipări, dar, fiind omorît, traducerea nu a mai fost publicată. O altă traducere în latinește a primelor patru cărți ale lui Apolloniu se tipărește abia peste vreo 80 de ani. Nefiind clară, peste alți 30 de ani, Commandino compune un text, mai precis al primelor patru cărți, care tratează partea elementară a teoriei conicelor. Despre cartea a cincea, considerată pierdută, se știa, dintr-o scrisoare a lui Apolloniu către Eudem că, între altele, ea se ocupă de „teoria maximelor și a minimelor", cu alte cuvinte de metoda de a duce tangenta la o conică.

— Nu înțeleg. Ce are de-a face maximul și minimul și cu tangenta?

— Are, fiindcă pentru a duce tangenta într-un punct al unei conice, Apolloniu construiește normala în punctul respectiv al curbei și pe ea duce o perpendiculară. Obținînd astfel tangenta la curbă, el consideră normala ca fiind un segment, de lungime maximă sau minimă, ce se poate duce dintr-un punct exterior curbei la un punct de pe curbă. Ei bine, știi ce face Viviani? Cu îndrăzneala pe care ți-o poate da numai entuziasmul celor 18 ani, Viviani își propune să ghicească cuprinsul cărții a cincea a lui Apolloniu! Mărturisind intenția sa lui Galilei, singurul în măsură să cunoască cît de profunde erau cunoștințele de geometrie greacă ale elevului său, acesta l-a încurajat.

— De îndrăzneala tînărului Vincenzo nu mă mir, dar de aprobarea lui Galilei, da. Cum putea să se încumete să încerce reconstituirea operei unui așa de subtil gînditor, folosind numai o vagă indicație?

— Nu-i chiar așa de grav! Mai întîi pentru că, pe atunci, încercările de reconstituire ale operelor clasice pierdute erau la modă. Încercaseră mai înainte — deși fără succes — și alți adînci cunoscători ai geometriei grecești, ca Marino Ghetaldi și Francesco Maurolico, și vor continua după el alți îndrăgostiți de geometrie, printre care chiar Pierre Fermat! Viviani avea și un oarecare ghid — e drept că

foarte vag — în comentariile lui Pappus, traduse tot de Commandino pe la sfîrșitul veacului al XVI-lea, cu titlul: *Collectiones* sau *Culegere*, cum i-am spune noi. În cartea a VII-a a *Culgerii* unde sînt menționate lucrările care constituie „tezaurul analizei", cum spune Pappus, adică operele lui *Aristeu*, *Euclid* și *Apolloniu* despre secțiunile conice, există unele indicații despre materia tratată în aceste opere. Or, Viviani avea impresia că se identificase cu modul de gîndire grec și, oarecum, chiar cu procesul de creație. Multe dintre teoremele aflate în cele patru cărți ale lui Apolloniu el le prevăzuse mai înainte de a le cunoaște din text. Cred că aceste lucruri le știa Galilei și de aceea l-a încurajat. Viviani a lucrat cu sîrg vreo doi ani la această carte a V-a, dar nu a putut continua. Anul 1642 începe cu moartea lui Galilei, care sfarmă nu numai liniștea lui sufletească, dar și condițiile lui de lucru. Ți-am spus că el intră în serviciul marelui duce de Toscana; astfel, i se impun sarcini care-i cereau destul de multă vreme și încordare intelectuală. Stabilirea teoremelor lui Apolloniu devine pentru el refugiul după o zi grea sau obositoare de muncă. Despre aceste cercetări ale sale știau vreo trei prieteni ai lui Viviani, cărora el le comunica din cînd în cînd rezultatele pe care le obținea. Printre aceștia era și Carlo Dati, alt elev de-al lui Galilei. Aceste rezultate ar fi continuat să rămînă multă vreme prilej de recreare și delectare intimă, dacă o întîmplare neprevăzută nu ar fi accelerat publicarea lor. S-a întîmplat anume ca prin iunie 1658, Alfons Borelli, pe atunci profesor de matematici la Pisa, să treacă prin Florența în drum spre Roma. Oprindu-se aici și cercetînd biblioteca marelui duce, el găsește un manuscris arab cu o însemnare în limba italiană: *Opt cărți despre conice ale lui Apolloniu din Perga*. Borelli nu cunoștea limba arabă, dar această însemnare i-a arătat că făcuse o descoperire senzațională, căci, după cum ți-am spus, pe atunci nu se cunoșteau decît primele patru cărți ale lui Apolloniu. Prin natura lui, fiind o fire stăpînită de pasiune și neliniște, faptul l-a impresionat nespus, așa că a mai rămas cîteva zile în Florența ca să cerceteze manuscrisul. Mai întîi, comparînd figurile din ma-

nuscris cu acelea care se aflau în traducerea primelor patru cărți, făcută de Commandino, a constatat asemănarea lor. Apoi, cu ajutorul unui călugăr care avea cunoștințe de limba arabă, a văzut că în cartea a V-a sînt probleme de maxim și minim, așa cum se știa că trebuie să fie din scrisoarea către Eudem și din alte comentarii. Astfel, încredințat că manuscrisul aflat cuprinde într-adevăr mai mult decît cele 4 cărți ce se cunoșteau pînă atunci din conicele lui Apolloniu, a cerut marelui duce permisiunea de a-l traduce. Ducele i-a încredințat manuscrisul ca să-l ducă la Roma, unde se afla un savat orientalist cu ajutorul căruia urma să facă traducerea. Viviani nu știa nimic despre aceasta, căci tocmai în acea săptămînă în care s-au petrecut evenimentele el era plecat din oraș și s-a reîntors exact în ziua cînd Borelli pleca la Roma cu manuscrisul lui Apolloniu.

— Îmi închipui ce emoție trebuie să fi avut Viviani cînd a aflat despre cele întîmplate!

— Da, și nu numai el, ci și prietenii lui, care, deși știau acestea, nu aveau cum să-l înștiințeze și nici nu puteau interveni fără de consimțămîntul lui. Prietenii lui regretau că nu și-a publicat lucrarea mai înainte, ca astfel să se poată stabili dacă a mers pe drumul cel bun sau nu. După întoarcerea lui Viviani, Carlo Dati îi arată situația marelui duce. Acesta îl cheamă pe Viviani și-l îndeamnă să publice lucrarea. Ca să elimine orice suspiciune asupra vreunei legături dintre lucrarea lui și opera lui Apolloniu, în timpul traducerii ei din limba arabă — limbă pe care Viviani nu o cunoștea — acesta a rugat pe principele Leopold să sigileze manuscrisul lui. Ajuns la Roma, Borelli începe traducerea și, pe la sfîrșitul lunii, Viviani primește o scrisoare de la el în care îl anunță, încîntat, că opera e mai frumoasă decît și-a putut-o imagina.

— Dacă Borelli i-a scris lui Viviani, înseamnă că el știa de lucrarea lui?

— S-ar fi putut să nu afle, fiind în Florența? Înclinat spre intrigi și neștiind ce s-a întîmplat după plecarea lui la Roma, e evident că scrisoarea a fost trimisă întîi ca să-l amărască pe Viviani și apoi ca să afle vești noi. Viviani

îi răspunde în ziua următoare lui Borelli, arătîndu-i că s-a decis să-și publice lucrarea sa de reconstituire a cărții a V-a și îl roagă să nu-i comunice nici un fel de amănunte relativ la cele ce a găsit în cartea lui Apolloniu. Borelli îi răspunde, arătînd că e de acord cu el și atestă totodată că Viviani nu are cunoștință de nici o propoziție din cartea pe care o traduce el acum. Pe la sfîrșitul lui octombrie, Borelli s-a întors de la Roma cu traducerea gata făcută. Marele duce a hotărît, în prezența principelui Leopold și a lui Viviani, ca nimeni să nu afle nimic din conținutul traducerii pînă ce nu se va publica lucrarea lui Viviani. Totodată, Viviani roagă să se constituie o comisie sub conducerea principelui Leopold, în care să se citească comparativ cele două lucrări și să se judece dacă ghicirea a reușit sau nu. Lucrarea lui Viviani, împărțită în două părți, e dată la tipar la sfîrșitul anului 1658 și apare în anul 1659, iar traducerea făcută de Borelli abia peste doi ani, în 1661.

— De ce a întîrziat atîta Borelli cu publicarea traducerii?

— Aceasta nu a depins de Borelli, ci de marele duce. El era acela care a decis tipărirea, căci el a suportat cheltuielile ambelor lucrări. De altfel, prin pana lui ascuțită, Borelli și-a vărsat veninul, natural nu asupra ducelui, ci asupra *prea-luminatului filozof și matematician Vincenzo Viviani din Florența*, din cauza căruia, afirmă el în prefață, această traducere a întîrziat să apară!

— Și care a fost rezultatul confruntării?

— Lucrarea a însemnat un succes extraordinar pentru Viviani. Toți matematicienii au fost de acord să-l proclame printre cei mai valoroși geometri de atunci. În elogiul pe care-l face președintele Academiei Franceze, Fontenelle, la moartea lui Viviani, căci trebuie să știi că Viviani a fost din 1699 unul dintre cei 8 membri străini ai Academiei din Paris, amintind de această lucrare, spune că Viviani a făcut mai mult decît să ghicească conținutul cărții a V-a, fiindcă a dus problemele mult mai departe decît le dusese Apolloniu!

La fel și Montucla, în binecunoscuta lui lucrare *Istoria matematicilor*, scrie că paralela care s-a făcut între lucrarea lui Viviani și a lui Apolloniu nu i-a fost dezavantajoasă.

În chestiunile care le tratează la fel cu Apolloniu este la fel de profund ca și geometrul antic, însă Viviani atacă un cîmp mai larg decît Apolloniu și găsește proprietăți noi ale conicelor, ceea ce face ca lucrarea sa să poată fi considerată ca un supliment la vechea teorie a curbelor. În același timp, Montucla observă că Viviani nu atinge chestiunile cele mai grele pe care le tratează Apolloniu în cartea a V-a, ca, de exemplu, determinarea punctelor de unde nu-i posibil să se ducă decît o singură perpendiculară.

Gino Loria consideră și el că reconstituirea cărții a V-a este demnă de celebritate, adăugînd: „Reconstituirea lui Viviani conține mai mult și mai puțin decît opera lui Apolloniu: mai mult prin vastitatea cîmpului de cercetare, mai puțin prin profunzimea investigațiilor". Ți-am arătat cîteva dintre părerile cu greutate, ca să te încredințez astfel de valoarea reconstituirii și de meritul ei.

— Dacă Viviani s-a născut în 22, în 58 avea 36 de ani. Probabil că tot de aceeași vîrstă a fost și Apolloniu cînd a compus cartea sa! La vîrsta aceasta și cu talentul lui excepțional, Viviani a putut intui ceea ce și un alt talent excepțional intuise mai înainte, chiar dacă între aceste două opere s-au interpus două mii de ani.

— Numai că Vincenzo Viviani s-a apucat de treaba asta pe cînd avea 18 ani. La această vîrstă, ca să te încumeți să faci așa ceva, mi se pare că trebuie să ai, pe lîngă curaj, și o doză bună de entuziasm, care adesea e considerat ca naivitate!

— Da! Lumea este a celor curajoși și entuziaști. Cei ce și-au spus că-i imposibil să atingi geniul lui Apolloniu, că, oricît de profund ai cunoaște geometria și metodele de cercetare ale geometrilor greci, numai întîmplarea poate face să privești problema exact din același punct de vedere ca și Apolloniu nu au realizat nimic. După cum vezi, pun accentul pe *întîmplare*, fiindcă Viviani nu cunoștea decît foarte vag *care sînt datele și cererile din problemă*; ca dovadă ai observațiile lui Montucla și Gino Loria. Însă acest tînăr impetuos nu urmărea gloria lui personală, el era stăpînit numai de curiozitatea științifică, de setea și bucuria de a descoperi acele adevăruri geometrice pe care le-ar fi putut îndrăgi Apolloniu. E aceeași patimă care-l îndeamnă și

pe un colecționar de tablouri să adune tablouri celebre sau pe un avar, banii. Pe el îl pasionau într-atît aceste teoreme de geometrie și se integrase în înlănțuirile lor logice cu atîta intensitate, încît, bănuiesc, nu s-a gîndit nici o clipă măcar la îndrăzneala pe care și-o lua, comparîndu-se el, băiețașul de 18 ani, cu Apolloniu, titanul ajuns la maturitate! A dorit și s-a hotărît să reconstituie cartea a V-a cu aceeași impetuozitate, ca și atunci cînd, deși avea numai 17 ani, i-a arătat lui Galilei că *nu-i de acord* cu faimoasa propoziție din „Ziua a treia"!

— Mi se pare că pe atunci geometria forma obiectul de predilecție al celor ce îndrăgeau matematicile și orice urme care conduceau la rezultatele stabilite de cei antici erau cercetate cu pasiune și nerăbdare. Am putut să observ aceasta din istoria cu Borelli.

— Desigur. În special operele lui Arhimede și Apolloniu cuceriseră admirația unanimă, prin subtilitatea problemelor puse și a soluțiilor indicate. Așa se explică interesul și succesul pe care l-a avut cartea lui Viviani. Uite, mi-am amintit acum și de un raport confidențial făcut de un călugăr specialist către superiorul său, în care acesta scrie cam așa despre lucrarea lui Viviani: opera trebuie prețuită pentru greutatea și frumusețea materiei tratate. Ni s-a spus despre el că are un deosebit talent geometric în inventarea teoremelor și îmi pare că aceasta se poate spune și despre cartea lui.

— Dar pînă acum nu mi-ai spus cum se cheamă această carte!

— Într-adevăr, așa-i. Ea a fost intitulată *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum* și a apărut, după cum ți-am spus, la Florența, în 1659. Pe vremea aceea însă, Viviani, prins într-o mulțime de lucrări de urbanistică, avea prea puțină vreme pentru matematici. Îți aduci aminte că lucra împreună cu Cassini la reglarea fluviului Tibru și, în același timp, făcea observații astronomice legate, după cum știi, de calcule migăloase; mai avea de ținut cursuri și să se ocupe cu educația științifică a principelui moștenitor!

— Da. Ocupații care îi răpeau timpul pe care altfel l-ar fi închinat geometriei!

— Nu-i de mirare deci că timp de 15 ani nu mai publică nimic. În volumul ce apare după acest răstimp se găsesc grupate la un loc două lucrări care nu au nici o legătură între ele. Una este o nouă traducere a cărții a V-a din *Elementele* lui Euclid, iar cealaltă se cheamă *Recreații geometrice*.

— Mi-ai spus că și Galilei făcuse unele observații în legătură cu teoremele din cartea a V-a, pe care le-a lucrat împreună cu Torricelli. Ele aveau să formeze subiectul zilei a cincea din *Dialoguri*. Probabil că Viviani folosește această lucrare a lui Galilei?

— Desigur. Acesta este și motivul pentru care publică traducerea. În prefață, el dezvăluie amănunte prețioase relativ la viața și opera lui Galilei. Traducerea este intitulată așa: *A cincea carte din Elementele lui Euclid sau știința universală a proporțiilor, explicată cu ajutorul părerilor științei lui Galilei*, urmată de *Începutul celei de-a cincea zi* pe care Galilei intenționa să o adauge celor patru tipărite în *Două noi științe despre Mecanică și Mișcarea locală*.

— Cum ai spus? Unde intenționa Galilei să adauge ziua a cincea?

— La *Două noi științe despre Mecanică și Mișcarea locală*.

— Știi că am făcut o descoperire?

— Vai de mine! Tocmai acum cînd sîntem în mijlocul pădurii și nu avem cum să o anunțăm! Hai degrabă acasă, ca să o poți comunica!

— Lasă gluma, îți vorbesc serios! Am descoperit cum a intitulat Galilei cartea pe care editorul olandez a numit-o *Dialoguri* și despre care spuneai că azi nu i se mai cunoaște adevăratul titlu. Uite, o spune clar Viviani: *Două noi științe*... Sînt sigur că așa a numit-o Galilei, căci Viviani știa foarte bine și, cînd o spune el, nu transcrie titlul cărții, ci o amintește așa cum era obișnuit să o numească sau să-l audă pe Galilei numind-o!

— Prea bine! S-ar putea să fie așa, dar ca să o dovedești ar trebui să mai faci cîteva cercetări suplimentare. Nu te-ar tenta un drum la Florența?

— O, desigur! Dar deocamdată nu dau vrabia din mînă pe cioara din par, așa că prefer să mai zăbovim aici vreun ceas-două, pînă la apusul soarelui. Și *Recreațiile geometrice* ce cuprind?

— *Recreațiile geometrice* cuprind soluțiile la mai multe probleme care au fost propuse, în anul 1675 de către un geometru din Leyda. Dorind să rămînă necunoscut, a publicat problemele prin intermediul altui matematician, cerînd matematicienilor italieni și germani să le dezlege. Răspunsuri parțiale au fost date de mai mulți matematicieni. Unul dintre ei a remarcat chiar că autorul problemelor *s-a ascuns sub masă*. Nefiind însă satisfăcătoare, unele dintre răspunsuri au provocat critici diatribe din partea unor matematicieni. Tocmai aceste neînțelegeri l-au determinat pe Viviani să publice *Recreațiile*. Ca să le apreciezi rostul adaugă că, pe atunci, nu existau reviste matematice, în afară de cele două organe ale Academiilor din Paris și Londra, care se tipăreau începînd din 1665. Asemenea publicații sau numai chiar anunțuri erau folosite de matematicienii care doreau să-și comunice unii altora problemele lor.

— Știu. Nu-ți amintești ce mi-ai povestit despre Descartes? Cum și-a început cariera lui matematică și totodată prietenia cu Beeckman?

— Eu? Cred că te înșeli. Ai citit probabil undeva. Dacă vrei, te rog chiar să-mi spui și mie povestea aceasta.

— Cu plăcere. Știu că pe cînd avea 22 de ani, Descartes se afla în Olanda, la Breda, unde plecase cu regimentul din care făcea parte. Plimbîndu-se într-o zi pe stradă, vede un anunț în limba olandeză, care părea că ar cuprinde o problemă de matematică. A așteptat pînă a văzut că un alt trecător s-a apropiat curios și a citit anunțul cu atenție, meditînd asupra lui. Atunci Descartes a rugat pe necunoscut să-i traducă și lui textul în latinește. Necunoscutul, nu cu mult mai în vîrstă decît el, care avea să devină cunoscutul savant Beeckman, i-a satisfăcut curiozitatea. A făcut-o probabil mai mult din politețe, căci atunci cînd a sfîrșit nu s-a putut opri de a-i spune: „Sper să nu vă fi tradus problema degeaba. Aștept să-mi arătați și mie cît de curînd soluția!" Descartes nu l-a lăsat să aștepte mult. I-a adus-o chiar a doua zi dimi-

neața, pe cînd Beeckman se putea gîndi la orișice, dar în nici un caz nu la faptul că ar putea veni Descartes ca să-i aducă soluția completă a problemei! Acum spune-mi adevărat, nu știu povesta asta de la tine?

— Ba da, dar nu credeam că o mai ții minte și încă cu atîtea amănunte.

— Cu alte cuvinte, belferul din tine mai răbufnește cîteodată!

— Ca să fiu destul de pregătit pentru un alt examen te rog să-mi spui dacă Viviani a rezolvat toate problemele propuse de matematicianul care *s-a ascuns sub masă*?

— Gîndeam că nu era nevoie să mai insist! Viviani nu putea face altfel decît să dea toate soluțiile posibile. Ba la acestea mai adaugă soluțiile altor probleme, propuse și de alți matematicieni. De pildă, se află aici o soluție a celebrei probleme despre trisecția unghiului — adică despre împărțirea unui unghi în trei părți egale, soluție care prin simplitatea ei a atras atenția matematicienilor francezi și e menționată în revista Academiei Franceze „Journal des Sçanvants".

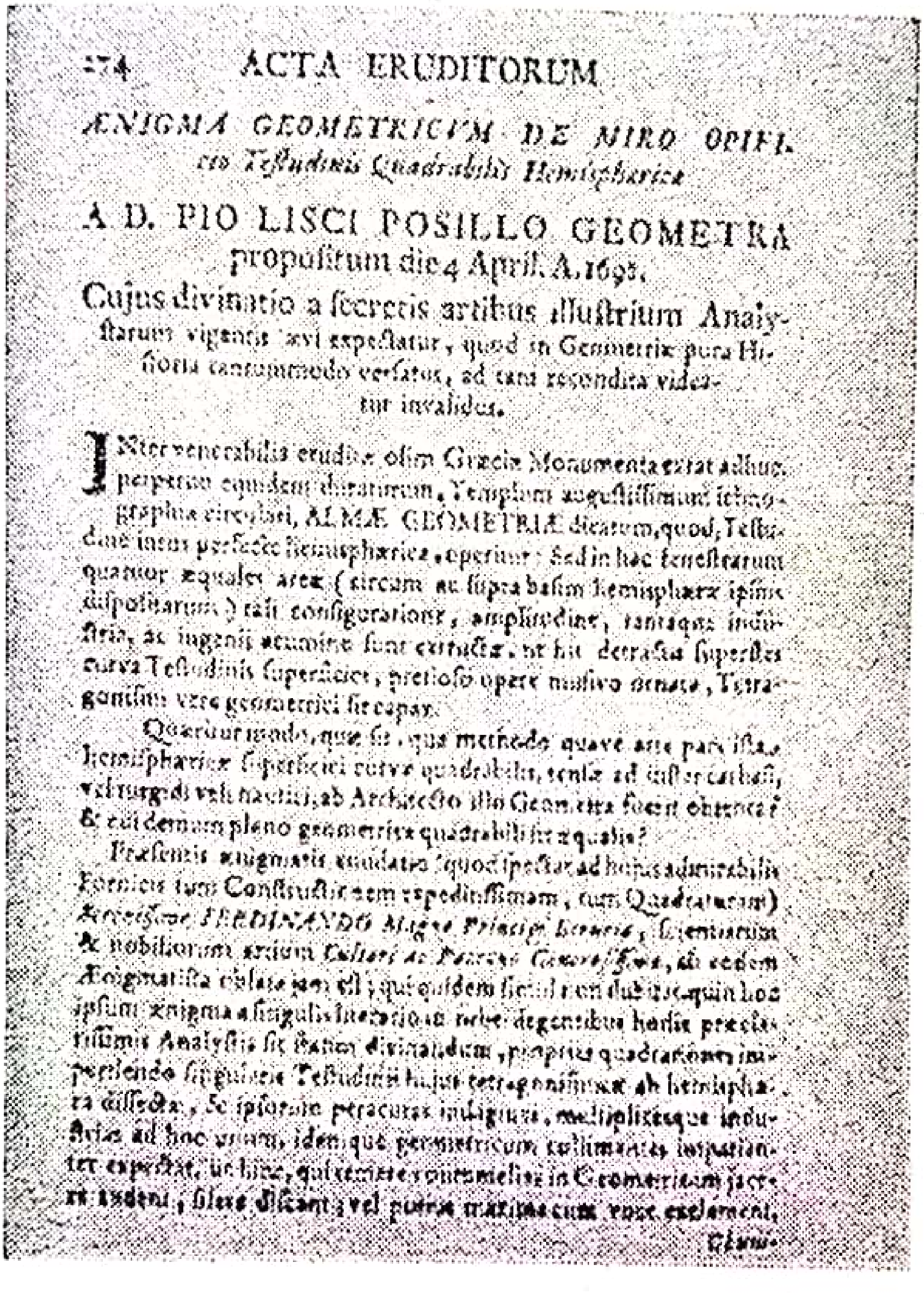
Peste alți 15 ani, adică prin 1690, Viviani publică o altă lucrare, și anume o traducere integrală a *Elementelor* lui Euclid. Această traducere completează fericit pe aceea făcută în 1572 de Fr. Commandino. Ea a fost imprimată de multe ori și de mai mulți autori, iar după moartea lui Viviani, fără să se mai amintească măcar cine este autorul. De aceea chiar în istoria matematicilor rareori se amintește că această traducere aparține lui Viviani. Specialiștii de atunci au arătat că ea este „de cea mai mare laudă prin precizia și puritatea limbajului". Cred că Viviani a preferat să publice această traducere a lui Euclid în loc de traducerea tot așa de perfectă a operelor lui Arhimede, numai ca să reîmprospăteze astfel amintirea profesorului său drag, a lui Galilei, fiindcă și cu acest prilej el tipărește din nou ziua a cincea a lui Galilei. Anume, lucrarea lui e formată din două părți. Partea întîi cuprinde primele cinci cărți ale lui Euclid, iar a doua

începe cu republicarea cărții a V-a, așa cum a apărut ea în 1674, și aceasta e urmată de cărțile a VI-a, a XI-a și a XII-a.

Dar timpul trece, și Viviani, deși lucrează cu aceeași ardoare de totdeauna, a îmbătrînit. În 1692 are 70 de ani. Mulți dintre prietenii și cunoscuții lui au murit. La început, adîncit în lucru și prins de obligații, nu se simte singur. Dar dintr-o dată își dă seama că nu se mai poate înțelege cu tineretul din jurul lui. Acesta nu se mai lasă copleșit de frumusețea operelor antice, ci se entuziasmează de anumite speculații moderne asupra infiniților mici, prin care pretind ei că rezolvă chiar probleme de geometrie! Chiar și în „Acta Eruditorum", revistă matematică editată de filozoful și matematicianul Leibniz, începînd din 1682, pe care o primește regulat de 10 ani, a observat că de cîțiva ani încoace apar tot mai des articole în care se face aluzie la o nouă metodă geometrică a maximelor și minimelor sau a tangentelor. Nu a dat el o atenție prea mare acestor lucrări, căci nu-și închipuie cum ar putea rezolva *această nouă metodă* o problemă de geometrie? Poate depăși această metodă nivelul pe care l-a atins gîndirea geometrilor greci? Și totuși, parcă l-ar încerca o

ACTA
ERVDITORVM
ANNO
M DC XCII
publicata.
LIPSIÆ

Fig. 15



274 ACTA ERUDITORUM

ÆNIGMA GEOMETRICUM DE MIRO OPIFI-
cio Testudinis Quadrabilis Hemisphæricæ

A D. PIO LISCI POSILLO GEOMETRA
propositum die 4 April. A. 1692.

Cujus divinatio a secretis artibus illustrium Analy-
starum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ pura Hi-
storia tantummodo versatos, ad tam recondita videa-
tur invalides.

INter venerabilia eruditæ olim Græciæ Monumenta extat adhuc, perpetuo equidem duraturum, Templum augustissimum ichnographia circulari, ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod, Testudine intus perfecte hemisphærica, operitur: Sed in hac fenestrarum quatuor æquales areæ (circum ac supra basim hemisphæræ ipsius dispositarum) tali configuratione, amplitudine, tantaque industria, ac ingenii acumine sunt extructæ, ut his detractis superstes curva Testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, Tetragonismi veræ geometrici sit capax.

Quæritur modo, quæ sit, qua methodo, quave arte pars ista hemisphæricæ superficiei curvæ quadrabilis, seu æ ad interstitia, vel turgidi vel nactici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? & cui demum plano geometricæ quadrabili sit æqualis?

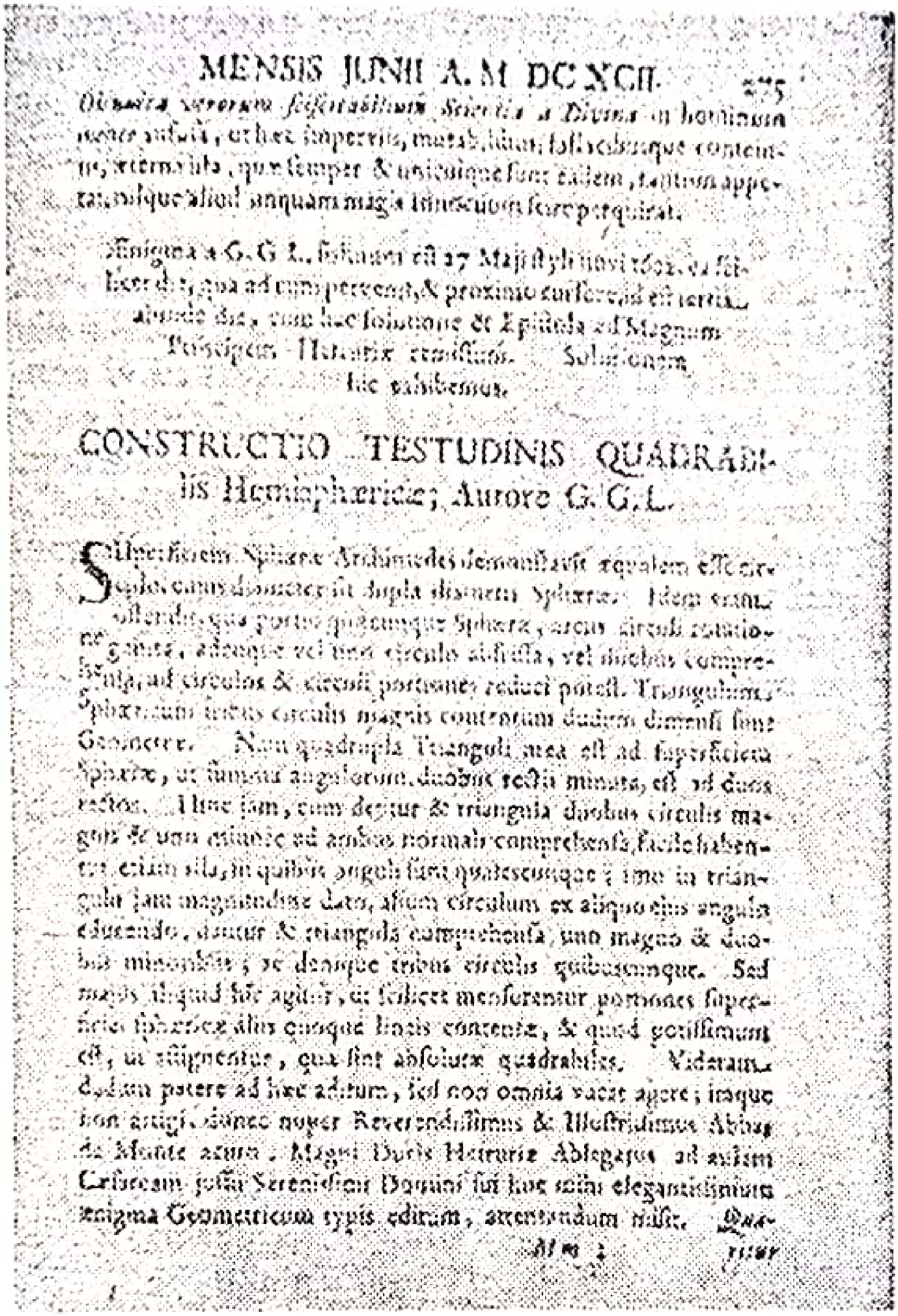
Præsentis ænigmatis enodatio (quod spectat ad hujus admirabilis Fornicis tum Constructionem expeditissimam, tum Quadraturam) *Serenissimo FERDINANDO Magno Principi Etruriæ*, scientiarum & nobiliorum artium *Cultori ac Patrono Generosissimo*, ab eodem Ænigmatista celata jam est; qui quidem sic ut non dubitat, quin hoc ipsum ænigma a singulis Interpretibus in orbe degentibus hodie præclarissimis Analystis sit statim divinandum, propriis quadraturam impertiendo singulis Testudinis hujus tetragonismis ab hemisphæra dissectæ, & ipsorum peracutas indagini, multiplicesque industrias ad hoc unum, idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament,

Geome-

Fig. 16

îndoială. Ce-ar fi să se convingă? Să puie la încercare pe acești tineri care-și dau aere de atoateștiutori!

Așadar, potrivit obiceiului timpului, propune și el o problemă, spre a fi dezlegată de către tinerii matematicieni și analiști *deținători ai artei secrete*. O trimite lui Leibniz ca s-o publice în „Acta eruditorum", și, totodată, tipărită pe o foaie volantă, o adresează multor matematicieni binecu-



MENSIS JUNII A. M DC XCII. 275

Divinitas verorum felicitatibus Scientia a Divina in hominum mente infusa, et hæc imperiis, mutabilium falsorumque contemptu, æternaque illa, quæ semper & unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innoxium fore perquirat.

Ænigma a G. G. L. solutum est 27 Maji styli novi 1692. eo scilicet die, quo ad eum pervenit, & proximo cursore ad eum tertio abinde die, cum hac solutione et Epistola ad Magnum Principem Hetruriæ remissum. Solutionem hic exhibemus.

CONSTRUCTIO TESTUDINIS QUADRABILIS Hemisphæricæ; Autore G. G. L.

Superficiem Sphæræ Archimedes demonstravit æqualem esse circulo, cujus diameter sit dupla diametri Sphæræ. Idem etiam ostendit, quæ portio quæcunque Sphæræ, arcu circuli rotatione genita, adeoque vel uno circulo abscissa, vel duobus comprehensa, ad circulos & circuli portiones reduci possit. Triangulum Sphæricum tribus circulis magnis contentum dudum dimensi sunt Geometræ. Nam quadrupla Trianguli area est ad superficiem Sphæræ, ut summa angulorum, duobus rectis minuta, est ad duos rectos. Hinc jam, cum detur & triangula duobus circulis magnis & uno minore ad ambos normali comprehensa, facile habentur etiam illa, in quibus anguli sunt qualescunque; imo in triangulo jam magnitudine dato, alium circulum ex aliquo ejus angulo educendo, datur & triangula comprehensa uno magno & duobus minoribus; ac denique tribus circulis quibuscunque. Sed majus aliquid hic agitur, ut scilicet mensurentur portiones superficiei sphæricæ aliis quoque lineis contentæ, & quod potissimum est, ut assignentur, quæ sint absolute quadrabiles. Videram dudum patere ad hæc aditum, sed non omnia vacat agere; itaque non attigi, donec nuper Reverendissimus & Illustrissimus Abbas de Monte acuto, Magni Ducis Hetruriæ Ablegatus ad aulam Cæsaream, jussu Serenissimi Domini sui hoc satis elegantissimum ænigma Geometricum typis editum, attentandum misit. *Quæ-*

Mm 3 *ritur*

Fig. 17

noscuți atunci, cum erau Iacob Bernoulli, Hospital, Wallis, Huyghens și alții. Am să-ți spun titlul ei, după „Acta eruditorum" din luna iunie 1692 (fig. 16 și fig. 17): *Enigma geometrică propusă de D. Pio Lisci Pusillo, geometru, iluștrilor analiști, încredințat fiind că prin arta lor secretă vor rezolva-o curînd*. Problema era formulată cam așa: „Printre anticele monumente ale Greciei, templul consacrat geome-

triei avea formă circulară și era încoronat cu o cupolă emisferică. Această cupolă e străbătută de patru ferestre egale și construite în așa fel, încît restul suprafeței să fie absolut cvadrabil. Cum au procedat geometrii antici?"

— Mai întîi observ că și Viviani s-a ascuns *sub masă*, că nu și-a dat adevăratul nume, ci un pseudonim.

— Ba nu, de loc! Numele *D.Pio Lisci Pusillo geometra* este o anagramă formată din *Postremo Galilei discipulo*, adică ultimul elev al lui Galilei. Ți-am spus că el considera faptul de a fi fost ultimul discipol al lui Galilei ca cel mai înalt titlu de glorie al lui. Or, matematicienii cărora le-a adresat problema au dezlegat ușor anagrama, fiindcă acest gen de transmitere a mesajelor nu era numai o distracție, la modă atunci printre matematicieni, ci se folosea și drept mijloc de comunicare a soluțiilor unor probleme pe care doreau să le ție secrete, ca astfel să-și păstreze prioritatea.

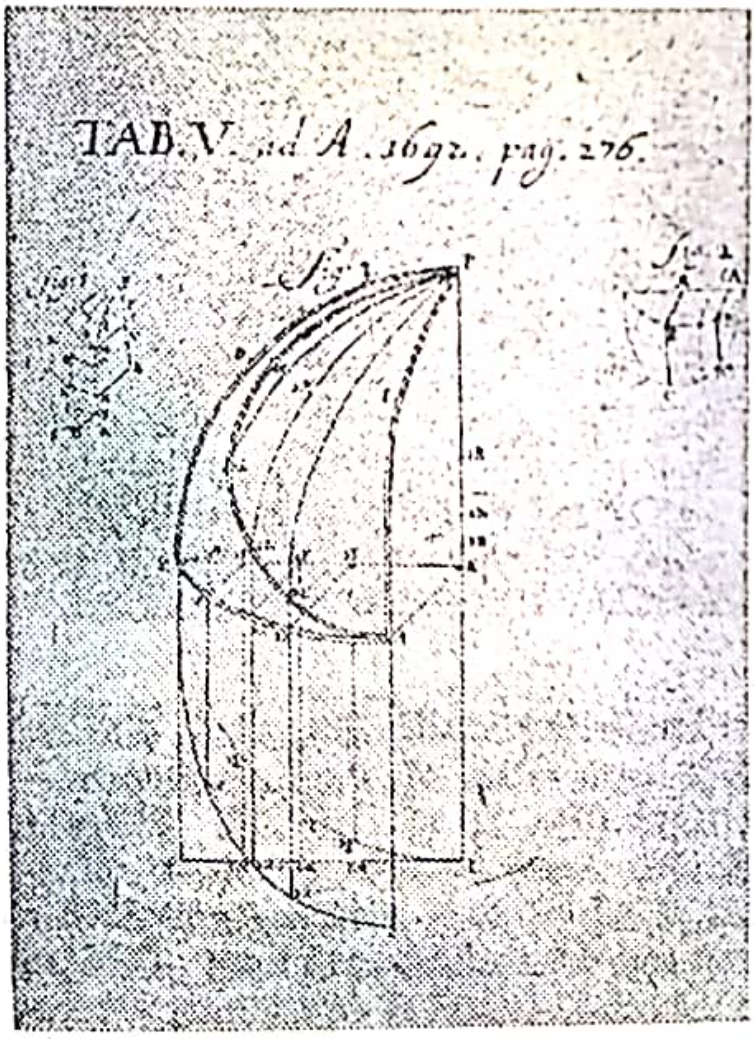


Fig 18

— Al doilea, ce se înțelege printr-o suprafață cvadrabilă?

— O suprafață a cărei arie se exprimă prin numere raționale, așa cum se exprimă și aria unui pătrat, dreptunghi, triunghi sau a oricărui alt poligon cu laturi exprimate în numere raționale. Cercul nu este absolut cvadrabil, fiindcă aria lui se calculează după formula πr^2, și π nu este un număr rațional, ci transcendent.

— Bine, dar dacă cercul nu-i absolut cvadrabil îmi închipui că nici sfera nu poate fi absolut cvadrabilă, fiindcă și în aria sferei intervine numărul π. Nu înțeleg atunci pretenția lui Viviani?!

— Uite, ca să înțelegi problema mai ușor, am să ți-o transpun în plan. O fac și cu un sentiment de duioasă aducere aminte, fiindcă acest exemplu îl țin minte de demult, de cînd eram student. L-am auzit la unul dintre colocviile de matematici care se țineau atunci în afara orelor de curs și seminar, sub conducerea veneratului meu profesor, fostul academician Alexandru Myller. Parcă-l văd... Era un colocviu în care se discutau proprietățile curbelor lui Viviani. Înainte de a începe discuțiile, el s-a dus la tablă, a luat creta și, după ce a desenat un cerc, a înscris în el un pătrat (fig. 19) și ne-a spus: „Cercul nu închide o suprafață absolut cvadrabilă, dar dacă se înscrie în el un pătrat, atunci dreptele *AB*, *BC*, *CD* și *DA* taie 4 segmente din cerc în așa fel, că porțiunea care rămîne este absolut cvadrabilă, avînd ca arie $2 r^2$. Cu alte cuvinte, π s-a înlocuit cu 2! Considerînd o cupolă în formă de emisferă, rolul pe care-l aveau laturile pătratului trebuie să-l joace acum curbele sferice care mărginesc cele patru ferestre ale lui Viviani și care sînt așa, încît aria suprafeței ce rămîne după ce s-au tăiat ferestrele, să fie $4 r^{2}$“ (fig. 20).

— E foarte intuitiv exemplul. Mai ales fiindcă procedeul repetă formal pe acela din cazul cercului. Aria unei emisfere este $2\pi r^2$ și dacă înlocuim π cu 2 obținem tocmai $4 r^2$!

— Ai ghicit!

— Bine spus. Am ghicit procedeul formal, încolo habar n-am nici cum se obțin ferestrele și nici cum se calculează aria lor!

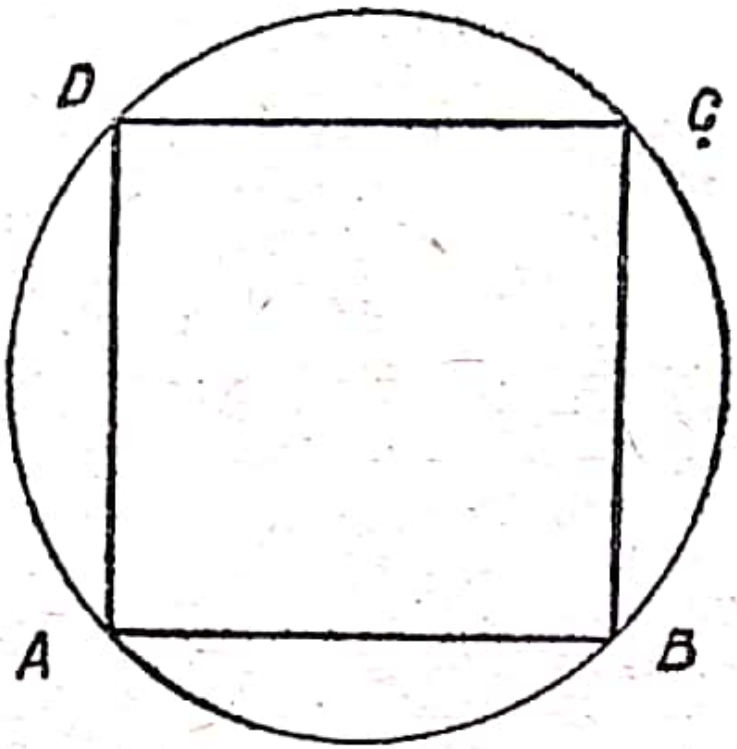


Fig. 19

— Habar n-ai cum se obțin ferestrele? Dar parcă cu cîteva ceasuri mai devreme îmi dădeai rețeta pentru dulceața de zarzăre verzi.

— Atunci e vorba de un cilindru, de acela cu care se găurește sfera?

— Nu despre un cilindru, ci despre doi cilindri circulari, fiecare avînd diametrul bazei cît raza sferei și fiind așezați unul lîngă altul, lipiți printr-o generatoare...

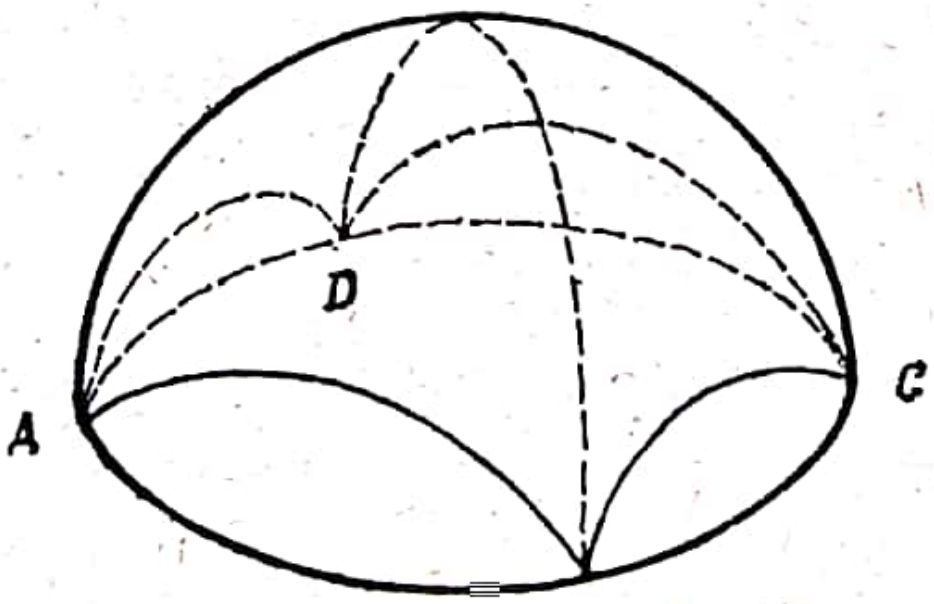


Fig. 20

— Da, văd clar de tot figura. Această generatoare comună se află chiar în planul de bază al emisferei și deci cei doi cilindri care străbat sfera taie emisfera numai cu cîte o jumătate din suprafața lor (fig. 21), formînd astfel cele patru ferestre, la fel de mari, pe care le-aș desena cam așa (fig. 20).

— Eu aș încerca să-ți fac un desen mai complicat, așa fel ca să apară și cilindrul și curbele lui de secțiune (fig. 22), uite cum e acesta. Parcă se vede mai clar aici că generatoarea comună celor doi cilindri trece prin centrul sferei și fiecare dintre cilindri este tangent la sferă în punctele diametral opuse de pe același diametru al sferei, nu? Această curbă de intersecție dintre sferă și cilindru se numește „curba lui Viviani".

— Dar cum a stabilit el soluția?

— Viviani nu a indicat metoda pe care a folosit-o. O demonstrație geometrică a fost dată peste 7 ani de un alt matematician italian, Guido Grandi, într-o lucrare intitulată *Ghicirea geometrică a problemei lui Viviani*. Ulterior, a mai fost găsită o demonstrație printre hîrtiile lui Huygens și publicată în operele sale complete. Binecunoscutul cercetător al istoriei matematicilor, Paul Tannery, într-un articol intitulat *Despre linii și suprafețe curbe în antichitate*,

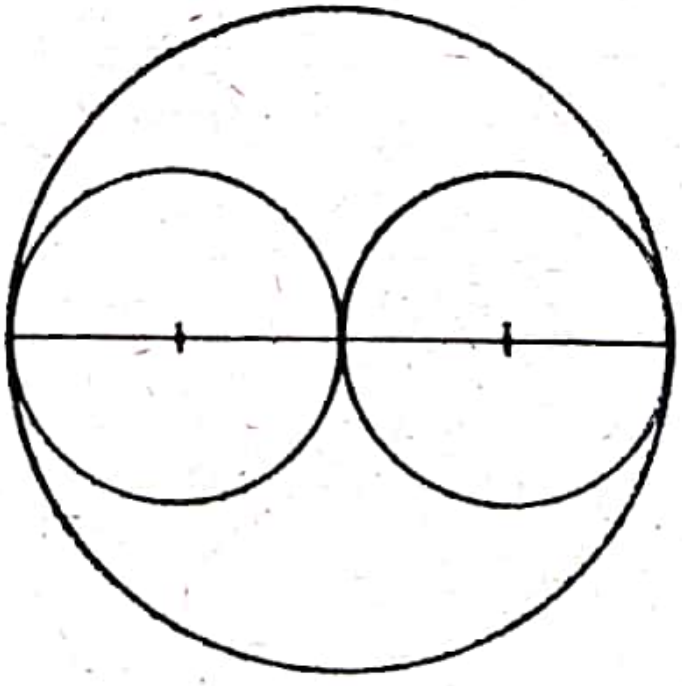


Fig 21

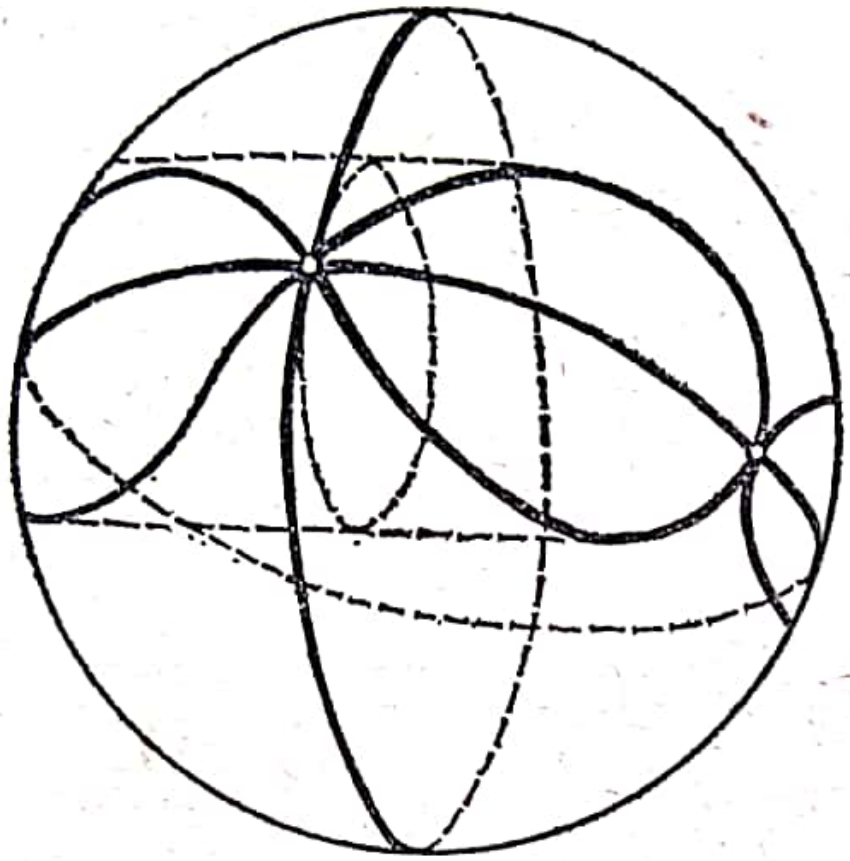


Fig. 22

arată că și matematicienii greci și-au pus problema determinării unei suprafețe sferice exact cvadrabile și înclină a crede că ei au cunoscut însăși curba lui Viviani. Paul Tannery deduce aceasta din scrierile lui Pappus și afirmă că ea nu-i alta decît *curba paradoxală a lui Menelaos*.

— Paradoxală? Probabil că în sensul vechi al cuvîntului, de *minunată, extraordinară*, și nu în acela al nostru, de *ciudat, contradictoriu*?

— Da, în prima accepție a cuvîntului Tannery susține această ipoteză și o motivează prin prezentarea unei alte curbe, la fel de remarcabilă, cunoscută azi sub numele de *Spirala lui Pappus*.

— Spirala lui Pappus? Eu cunosc altă spirală, aceea a lui Arhimede. Chiar știu să o desenez.

— Da, dar cu compasul, nu-i așa?

— Sigur că da, cu compasul; am învățat-o la desen!

— Ceea ce ai învățat tu la desen *seamănă* cu spirala lui Arhimede, dar nu-i chiar spirala lui Arhimede, căci aceasta nu-i formată din arce de cerc racordate între ele. Însă apro-

pierea care ai făcut-o cu spirala lui Arhimede nu-i rea! Știi poate cum se definește această curbă plană?

— Natural. Locul descris de un punct care se mișcă uniform pe o dreaptă, începînd de la un punct fix, în timp ce dreapta se rotește uniform în jurul acelui punct fix.

— Bine. Acum schimbă dreapta cu un cerc meridian pe sferă și vei avea definiția spiralei lui Pappus!

— Cam complicat, dar să încerc. Așadar, trebuie să consider o sferă și pe această sferă un plan meridian, care se rotește în jurul axei polilor, pornind de la un plan meridian fix luat ca origine. Acestea sînt elementele care corespund dreptei din plan și punctului fix de pe dreaptă în jurul căreia se învîrte ea.

— Exact. Acum nu-ți mai rămîne decît să plasezi punctul și să-i stabilești mișcarea.

— Asta te rog să o faci tu.

— Bine. Consideră că punctul pornește din pol și parcurge cercul meridian cu o mișcare uniformă, în așa fel că, în timpul cît acest punct parcurge un sfert de cerc, cercul meridian, pe care se află el se rotește cu o viteză constantă în jurul axei și revine de unde a plecat.

— În acest caz, punctul descrie o curbă în formă de elice trasată pe suprafața sferei. Era deci necesar să i se spună *spirală*, numai că e o *spirală sferică*.

— Această curbă are și ea proprietatea curbei lui Viviani, anume că aria porțiunii de pe sferă cuprinsă între spirală, meridianul fix de pe sferă și planul ecuatorului este egală cu pătratul diametrului sferei, adică tot cu $4r^2$. Dacă ne întoarcem la curba lui Viviani, pot să adaug că ea a mai fost folosită și de alți matematicieni, chiar înainte de Viviani, de pildă și de Descartes. Totuși, după cum ți-am spus, curba care mărginește ferestrele cupolei sferice din problema adresată de Viviani, în 1692, poartă numele lui, în semn de omagiu pentru problema care a interesat și încîntat pe atîția matematicieni, conducînd la multe rezultate noi.

— Problema lui Viviani reprezenta o provocare, nu?

— El pretinde că nu. În prefața cărții lui Viviani, *Formarea și măsurarea oricărei cupole*, publicată cîteva luni mai tîrziu, în care problema aceasta se găsește alături de altele

de o natură mai generală, el caută să înlăture această suspiciune, spunînd: „Nu pretind că problema reprezintă o provocare sau o chemare la duel, căci acesta mi-a fost odios întotdeauna, dar simt dorința de a cunoaște multiplele căi prin care celebrii analiști moderni vor fi conduși spre un același adevăr geometric, așa de frumos". În realitate însă, eu cred că problema era o provocare.

— Și care a fost rezultatul?

— Pentru Viviani un *dezastru* sufletesc, pentru istoria matematicilor o *problemă celebră*!

— Iar vorbești în doi peri?

— De loc. Judecă singur. Leibniz publică în „Acta eruditorum" primul răspuns, chiar pe pagina care cuprinde și enunțul. El aplică pentru prima oară calculul infinitezimal la determinarea ariilor suprafețelor care nu sînt plane și, stabilind rezultatul, adaugă încîntat: „Iată cît de fecundă apare analiza mea infinitezimală!" Viviani constată veridicitatea rezultatului, dar nu-și dă seama cum a putut fi găsit.

Tot în „Acta eruditorum" din același an, Jacob Bernoulli găsește cinci soluții diferite ale problemei, pe care o numește *enigma florentină*. Viviani le acceptă uimit și se întreabă cum au fost stabilite.

— Nu înțeleg de ce pot exista *cinci soluții diferite* ale uneia și aceleiași probleme?

— Fiindcă problema pusă de Viviani este nedeterminată, în sensul că o porțiune de sferă exact cvadrabilă ar putea fi mărginită de curbe diferite. Ai văzut că și spirala lui Pappus poate fi o soluție. Fără întîrziere i-a rezolvat problema și marchizul de l'Hospital din Paris. În același an apare în „Philosophical Transaction" soluția marelui matematician englez John Wallis la *Problema Florentinum*, iar David Gregory a publicat rezultatele aflate de el în 1694. Huygens n-a răspuns, deși s-a putut constata, din mai multe scrisori adresate marchizului de l'Hospital, că a cercetat această problemă și i-a stabilit o soluție. Într-un articol publicat în 1953, Luigi Tenca urmărește răsunetul pe care l-a avut *Problema florentină* după scrisorile adresate atunci direct lui Viviani din Amsterdam, Hanovra, Londra, Ma-

drid, Oxford, Praga etc., scrisori în mare parte inedite, care se păstrează în Biblioteca națională din Florența. Alături de numele pomenite de mine sînt citate aici acelea ale lui Varignon, Frații Ceva, Giordano, Grandi, Saccheri, și altele, acum uitate. În toate acele scrisori se găsesc cuvinte de laudă și admirație atît pentru problema propusă de el, cît și pentru cartea sa *Formarea și măsurarea oricărei cupole*. Te întrebi dacă aceste răspunsuri nu-l vor fi copleșit îndeajuns? Ascultă ce-i spune matematicianul francez, de la Hire, în scrisoarea sa, după ce elogiază *forța genială* cu care Viviani analizează „într-un mod așa de fericit" diferitele cvadraturi ale secțiunilor dintre sferă și cilindru: „*Nu vă pot spune, ca dl. Leibniz, că am rezolvat enigma dv. în chiar ziua cînd am primit scrisoarea, căci eram foarte ocupat atunci și cînd aș fi avut timp să dau o soluție ca a lui, pe care o consider neînsemnată, mi-ar fi fost rușine de ea, după ce am văzut-o pe a dv., diversificată în multe variante așa de simple și de elegante. E adevărat că aveți un mare avantaj față de cei cărora le-ați propus problema, dar dacă consider faptul în sine, crește stima pe care știți că o am de mult pentru meritele dv., cărora le-am adus mărturie publică...*"

— Da, scrisoarea asta are iz de consolare!

— Asta-i și părerea mea, de aceea ți-am redat cele cîteva rînduri pe care nu le-am uitat.

— Totuși, cuvîntul *dezastru* îl găsesc cam exagerat. Eu cred că dezamăgirea lui a fost din plin compensată de atîtea dovezi măgulitoare despre interesul pe care l-a stîrnit problema propusă de el.

— Nu sînt de loc de părerea ta! Să nu uiți că de la 16 ani Viviani a fost obișnuit să i se recunoască talentul de geometru. De atunci el era considerat, de către cei competenți, drept unul dintre cei mai abili mînuitori ai teoremelor din geometria greacă. Cel mult Huygens — marele și neîntrecutul Huygens — ar fi putut să-l provoace la întrecere. Or, la 70 de ani, după o carieră așa de îndelung glorioasă, plăcerea de a ți se recunoaște că ai propus o problemă interesantă, căci el știa foarte bine că problema este interesantă, poate compensa sau înlătura constatarea eșecului? Această problemă a fost trimisă în lume ca o provocare și, prin răs-

punsurile obținute, ca s-a întors asupra lui ca un bumerang! El nu și-a închipuit că *problema lui*, pusă pe cîntarul analizei infinitezimale, va trage așa de ușor! Vezi tu, o problemă este interesantă cînd cere un anumit efort intelectual, o anumită subtilitate ca să-i afli soluția și Viviani nu a ezitat să-și înzestreze problema cu o asemenea calitate. El credea că propusese tinerilor analiști o problemă foarte grea, la care spera să-i vadă muncind din răsputeri pînă să-i întrevadă soluția; și, cînd colo, problema a fost considerată de ei ca un simplu exercițiu, iar soluții i-au fost prezentate cu duiumul și pe nerăsuflate! Oare nu-i un dezastru să-ți dai dintr-o dată seama că te-ai înstrăinat de obiectul preocupărilor tale, de geometrie? Căci din răspunsurile primite el a văzut, mai bine ca oricine altul, că nu mai posedă cu adevărat geometria, că el nu cunoaște *acele metode subtile prin care se poate ajunge ușor și repede la soluție*, ocolind drumurile lungi, desișurile încîlcite sau prăpăstiile cu punți șubrede! El nu a bănuit că tinerii analiști, pe care îi privea cu neîncredere, fiindcă nu adînceau suficient metodele antice ale geometriei, au fost în stare să făurească instrumente noi de cercetare a științei matematice și în particular a geometriei, instrumente cu care aveau dreptul să se mîndrească, așa cum a făcut-o Leibniz cînd a scris: „Iată cît de fecundă apare *analiza mea infinitezimală*". Da! La 46 de ani, Leibniz avea *analiza lui*, cu ajutorul căreia a stabilit în cîteva clipe rezultatele la care el, după 50 de ani de continuă cercetare a geometriei, nu a fost în stare să ajungă decît după îndelungă vreme. Iar Jacob Bernoulli, care avea de-abia 40 de ani, i-a arătat dintr-o dată, *5 soluții diferite ale problemei*, căreia el nu-i văzuse decît una singură! Atunci și-a dat seama de zădărnicia strădaniei lui de o viață întreagă ca să se integreze în gîndirea geometrilor greci și a înțeles că frumusețea acelor demonstrații l-a vrăjit ca o pălălaie de foc pe timp de iarnă. Sub vraja limbilor de foc, a rămas închis în casă și a continuat să se încălzească la sobă, în timp ce afară venise primăvara, primăvara matematicilor, una dintre acele primăveri clocotitoare de sevă, cu ghiocei și brebenei care străpung pătura de zăpadă... Însăși anagrama pe care a compus-o fericit: „D. Pio Lisci Pusillo geo-

metra" îl privea cu cei mai batjocoritori ochi pe care i-a văzut vreodată în viață, spunîndu-i parcă: Tu ești ultimul elev al lui Galilei? Poate! dar ar fi bine să te consideri cel mai netrebnic elev al lui Galilei! Ai putut sta *tu* în preajma *lui*, a aceluia care a dăruit, oamenilor de știință, ramuri de magnolia încărcate de bobocii care-și desfăceau petalele mari și aburii și nu ai simțit căldura soarelui de primăvară? N-ai simțit seva care se ridica deodată în firele de iarbă și-n mugurii copacilor? Cum îndrăznești să te numești *tu, ultimul elev al lui Galilei*, dacă n-ai cercetat și n-ai căutat ce este nou, *noul* pe care *el* l-a semănat prin opera lui? I-ai scris viața, ai pronunțat de atîtea ori „Due *nuove* Scienze" și nu ți-ai dat seama că *cele două științe noi* nu pot rămîne singure și izolate? Că *știința nouă, bazată pe observație și experiență*, pe care o promovează Galilei, are nevoie de o geometrie nouă, de noi mijloace de investigație matematică? Ai tipărit tu însuți cartea a V-a a lui Euclid, cu observațiile pe care le-a făcut *bunul bătrîn*, cum îl numește Segredo cînd spune: „Recunosc că în acești ani mi-au trecut prin minte diverse idei *privitoare la lucrurile noi demonstrate de bunul bătrîn*", și tu te-ai mărginit și *te-au mulțumit* numai gîndurile ce erau noi cu 2 000 de ani în urmă? Ai rămas să te joci cu metodele clasice cum se joacă un copil cu jucării și, mulțumit de bucuriile pe care ți le aduceau rezultatele obținute, ai reușit să te înstrăinezi de însuși obiectul care ți-a fost cel mai drag pe lume, de geometrie, adică de viața ta sufletească, de tine însuți!

— Da. Cred că D. Pio Lisci Pusillo avea dreptate să se războiască cu dl. Viviani. În secolul al XVII-lea, și mai ales în a doua lui jumătate, se observă o efervescență generală... Descartes și filozofia carteziană în luptă fățișă și acerbă cu scolastica...

— Exact. Cu totul alta ar fi fost situația cu vreo 60—70 de ani în urmă. Dacă ar fi trăit atunci, prin activitatea lui, Viviani ar fi putut contribui în mod efectiv la progresul matematicilor. Acum însă era prea tîrziu, zăpada se topise, pămîntul era reavăn și aștepta să fie din nou semănat. Ca să vezi clar acestea, am să-ți enumăr numai cîteva dintre faptele matematice importante. În 1637, Descartes publică în

Olanda, la Leyda, *Discurs asupra metodei*. Aici el arată o nouă cale ce se deschide în tratarea problemelor geometrice, punîndu-se în corespondență cel mai simplu element geometric — punctul — cu cele mai simple elemente algebrice; un dublet de numere algebrice. Mai tîrziu, metoda lui s-a extins și la corespondența dintre punct și un triplet sau chiar cu o mulțime — n de numere algebrice.

— Vrei să spui că odată stabilită această corespondență raționamentul geometric aupra punctului se traduce într-un calcul algebric asupra coordonatelor punctului din plan sau din spațiu cu trei ori mai multe dimensiuni?

— Da. Tot prin 1637, Fermat, alt îndrăgostit și adînc cunoscător al geometriei antice, aduce altă contribuție importantă geometriei: pornind de la metoda prin care Arhimede găsise aria unui segment de parabolă...

— Stai. Aici vreau să te opresc ca să-mi lămurești ceva. De cînd eram elev m-am întrebat de ce în cărțile de geometrie se stabilește numai formula ariei triunghiului, a pătratului, a unui poligon și a cercului și nu se arată nici o formulă prin care să se calculeze aria unei suprafețe plane mărginite de un contur curbiliniu oarecare?

— Foarte simplu. Geometria lui Euclid nu are mijloace de a stabili o asemenea formulă. Această problemă, numită a *cvadraturii*, va rezolva-o în acest veac al XVII-lea Newton și Leibniz, avînd ca premergători întîi pe Arhimede, apoi pe Kepler, Cavalieri, Fermat și alții. Tocmai vroiam să-ți spun că Fermat a generalizat o metodă a lui Arhimede ca să calculeze astfel aria unor suprafețe plane mărginite de linii, ale căror ecuații sînt mai complicate decît aceea a parabolei. Ecuația $y = ax^2 + bx + c$. reprezintă, după cum știi bine, o parabolă!

— Da, știu, reprezentarea grafică a trinomului de gradul al doilea... inegalități de gradul al doilea...

— Deși Fermat nu publică rezultatele sale, ele sînt cunoscute de matematicienii care urmăreau problemele moderne din corespondența particulară pe care o aveau între ei. Geometria se mai îmbogățește și cu alte rezultate. În 1667, Jammes Gregory, atunci numai de 29 de ani (Viviani avea

45), publică la Padova vestita carte *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, în care arată un procedeu general de a găsi aria oricărui sector de conică cu centru. Dar să nu uităm că în 1643 se naște Newton și că în 1669 apar *Lecțiile de geometrie* ale lui Barrow, profesorul lui Newton, în care, pe de o parte, sînt folosite ideile lui Galilei și, pe de altă parte, se anticipează asupra calculului diferențial. În 1684, Leibniz publică memoriul, rămas celebru, despre calculul diferențial. Metoda sa însă fusese cunoscută de mai înainte, căci el inițiase cîțiva elevi în acest uluitor mijloc de calcul, numit într-o vreme și *calculul sublim*. Iată cît de frămîntate erau gîndu-

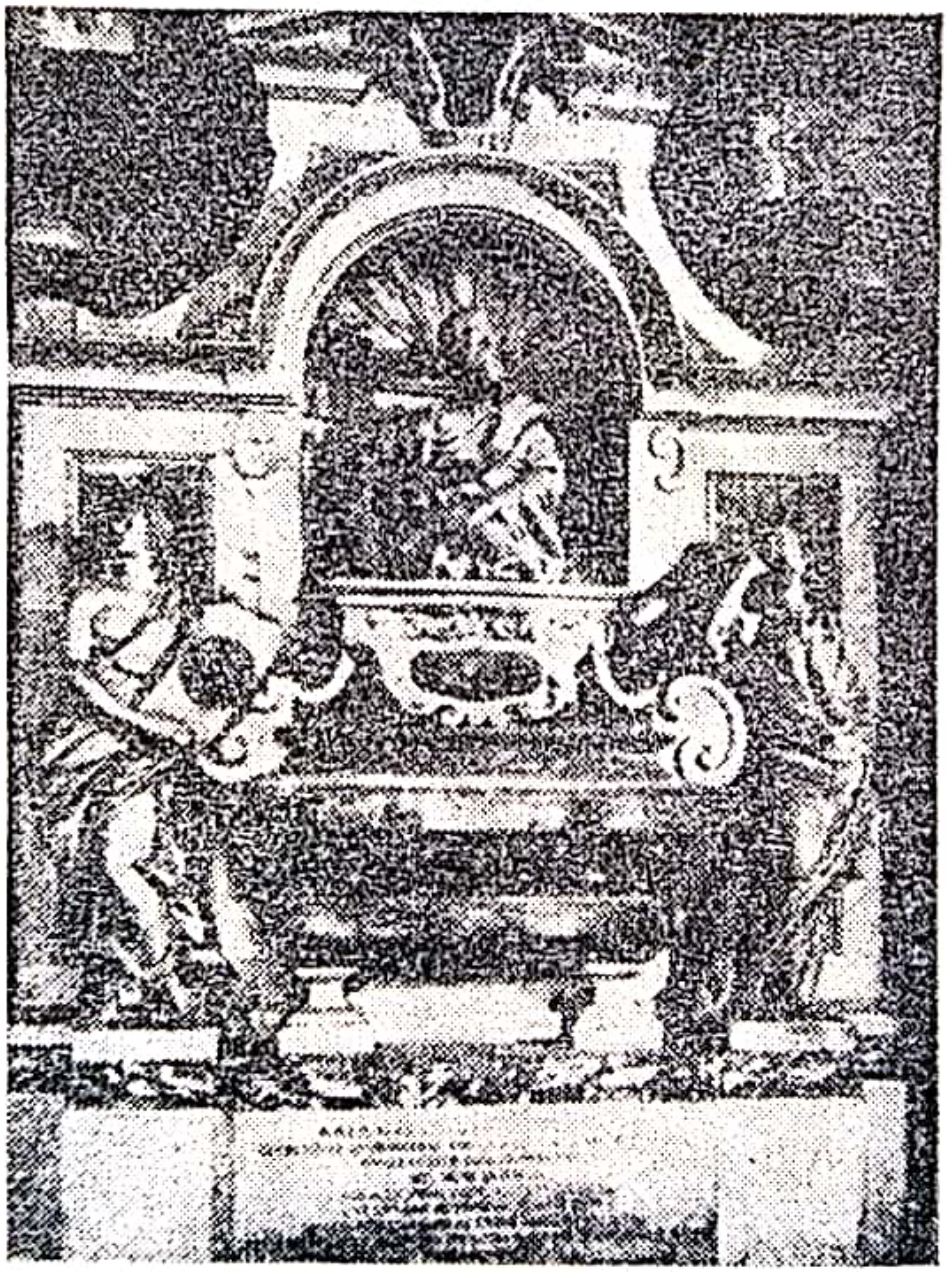


Fig. 23
Mormîntul lui Galilei și Viviani din Santa Croce (Florența)

rile tinerilor matematicieni din a doua jumătate a acelui veac.

E drept că nu toți matematicienii de atunci s-au sesizat de aceste metode noi. Chiar Huygens, pe care Leibniz îl considera ca profesorul lui de matematici, deși era oarecum la curent cu noile descoperiri ale lui Leibniz, nu s-a simțit atras de aceste *noi concepții*, care vor modifica însăși structura matematicilor viitoare. Tîrziu de tot, cînd a observat succesele metodei nou introduse, el și-a propus să se documenteze mai serios și probabil că a reușit să-și satisfacă curiozitatea, *dar nu a folosit niciînd metoda analizei infinitezimale în lucrările sale*, pentru că aceasta îi apare prea formalistă! Poate că și el, ca și Viviani și alți matematicieni de atunci, nu au dat importanța cuvenită noului calcul, fiindcă nu se puteau desprinde din farmecul pe care-l degajau încă, prin precizia și logica acelor sobre demonstrații de loc simple sau ușor de înțeles, operele clasicilor greci. Arhimede, mai ales, exercita o atracție deosebită și trezea o admirație extraordinară prin teoremele descoperite de el, de multe ori enunțate fără demonstrație. Viviani, urmărind să restabilească acele demonstrații a parcurs numai cărările trecutului, alții însă, cercetînd metodele antice, le-au depășit; ei au folosit rezultatele vechi ca să stabilească altele noi. Astfel, Fermat, căutînd, cu mult înainte de Viviani, prin 1629, să reconstituie, tot după indicațiile lui Pappus, o altă operă pierdută a lui Apolloniu, numită *Loci Plani*, nu s-a oprit numai la această încercare de reconstituire, ci a dus mai departe ideile de acolo, ajungînd astfel la primele noțiuni de geometrie analitică. Vezi dar că Fermat s-a descătușat de lanțurile antichității pășind spre viitor. El a trăit astfel în prezent, pe cînd Viviani a rămas prins în păienjenișul speculațiilor geometrice de odinioară, mulțumindu-se să-și facă un ideal din ghicirea unor opere pierdute sau din traducerea perfectă ale acelora care s-au păstrat.

— De ce spui mereu *ghicire*? Cred că ar trebui să spui *reconstituire*.

— Nu. Este o deosebire între o noțiune și alta, iar Viviani și-a intitulat lucrările *divinatio*, adică *ghicire*. De altfel a

remarcat această deosebire un pasionat și adînc cunoscător al istoriei matematicilor, Gino Loria. El accentuează că *intenția* lui Viviani a fost aceea de a *ghici*, și nu de a *reconstitui* operele pierdute de care s-a ocupat, dat fiind că el avea prea puține elemente de la care să poată porni ca să poată face o *reconstituire* a lor! Cînd s-a decis să întreprindă această *ghicire*, el s-a bazat numai pe spiritul lui geometric, pe adînca cunoaștere a geometriei clasice și pe imaginația lui. De aceea, chiar dacă *reconstituirea* nu a reușit, *ghicirea* lui Viviani reprezintă o continuare, un adaos la opera lui Apolloniu, fiind compusă în spiritul lui. Și tocmai acesta-i meritul de creator pe care și l-a cîștigat Viviani, fără să-l fi urmărit!

— Atunci de ce-mi spui că Viviani s-a simțit înstrăinat, că a suferit din această pricină? Poate că, din contra, izolat în cercetările lui, el s-a simțit foarte fericit! Ai găsit cumva în amintirile lui că ar fi trecut prin atare angoase?

— Nu, nu din amintirile lui i-am cunoscut *angoasa* — cum spui tu — ci din *hotărîrea* lui de a propune problema cu *cupola cvadrabilă*. Problema era *grea* și era aleasă *anume* în așa fel ca să nu o poată dezlega decît un geometru abil, de puterea lui Viviani. Matematicianul de la Hire l-a priceput bine, ai văzut ce-i scrie: aveți un mare avantaj față *de cei cărora le-ați propus problema*. De altfel, trebuie să-ți spun că mie nu mi-a fost greu să-i ghicesc starea lui sufletească, fiindcă azi ea se repetă în sufletul meu și al multora altora, să nu spun matematicieni — poate că-i prea greu cuvîntul — dar cunoscători sau îndrăgostiți de matematici din generația mea. Același proces de reînnoire, de răbufnire, care s-a petrecut în a doua jumătate a veacului al XVII-lea, cristalizîndu-se și desăvîrșindu-se treptat în veacurile următoare, s-a declanșat și mai tumultuos acum, începînd, să zicem, din preajma primului război mondial. Ca și atunci, această nouă reînnoire s-a petrecut fără trîmbițe. În 1925—1929, pe cînd am urmat eu cursurile de matematici, aceste cursuri cuprindeau, în linii generale, tot problemele clasice pe care le puteai citi din tratate sau manuale. De pildă, în geometria diferențială, cărțile lui L. Bianchi, G. Darboux, G. Loria, W. Blaschke, B. Riemann erau mo-

derne și celebre prin problemele, ideile și rezultatele noi ce le cuprindeau. În revistele de matematici se tratau problemele de geometrie diferențială, bazîndu-se pe aceste concepții și folosind notațiile din aceste cărți, de aceea eu le puteam citi destul de ușor. Or, domeniul care-mi părea, prin 1930—40, că-l cunosc bine, acela al geometriei diferențiale, cu linii de curbură sau geodezice cu suprafețe care satisfăceau condiții complicate, cu admirabilele generalizări ale noțiunii de curbură, cu discuții despre aplicabilitatea suprafețelor una pe alta, cu acea, modernă atunci, noțiune de paralelism în sens Levi-Civita... toate aceste probleme sînt pentru tînărul geometru de azi, care mînuiește cu ușurință problemele de topologie și axiomatică, niște naive exerciții de seminar. După ce am terminat și am plecat din Iași, am continuat să urmăresc problemele care-mi plăceau și chiar să găsesc unele rezultate noi. Școala și alte griji au întrerupt cîtăva vreme aceste preocupări. Apoi a venit războiul cu toate calamitățile lui. Peste vreo 15 ani, adică după 1955, rămînînd mai multe zile la Iași, m-am dus din nou la Seminarul matematic, ca să mai răsfoiesc revistele care mi-erau odinioară tovarășe, și am căutat articole de geometrie diferențială. Nu mi-a trebuit mult ca să înțeleg realitatea. Aproape totul mi-era străin: titluri, notații și concepții. Rare de tot erau articolele care aminteau trecutul. Parcă nici nu mai era vorba de geometrie, ci de altă ramură a matematicilor, ce putea fi analiză, sau topologie, sau teoria mulțimilor, sau toate la un loc. Am crezut că visez. Cîțiva tineri asistenți, îndrăgostiți de matematici, cum eram și eu odinioară, discutau cu pasiune aceste lucrări și nu arătau nici o greutate în mînuirea noilor calcule și a problemelor care îmi păreau atît de străine și pe care nu le voi mai putea urmări nici rezolva eu vreodată! Dar aceasta nu s-a întîmplat numai în domeniul meu. Întîlnindu-mă cu un fost coleg, care a continuat să se ocupe de matematici și a devenit în ramura sa un mare om de știință, mi-a spus că și în analiza matematică, de pildă, s-a petrecut exact același fenomen, că și pentru el există azi ramuri *din specialitatea lui* care-i sînt străine, că sînt probleme care l-au depășit și pe care el nu le mai poate urmări, deși el nu a întrerupt,

ca mine, studiul, iar acele probleme aparțin chiar domeniului în care lucrează.

— Mi se pare că această situație, aș spune această explozie, se observă azi și în celelalte domenii ale creației, atît culturale, cît și artistice, avalanșa lucrărilor tipărite în ultima vreme periclitînd însăși problema informării. Nu demult am citit într-un articol că, pe baza materialului existent în 1940, se calculase că știința își va dubla volumul la fiecare 50 de ani. Dar după ce mașinile de calcul au devenit colaboratorii omului de știință, prevederile s-au dovedit a nu mai corespunde realității! Ca urmare a diviziunilor succesive ale ramurilor științifice, în 1950 s-a constatat că volumul științei urmează să se dubleze la fiecare 10 ani. Iar în 1960, o nouă apreciere a redus rația la 7 ani. Îți spun drept că multă vreme m-au chinuit aceste constatări uimitoare. Cum adică? În 7 ani creierul omenesc poate inventa, descoperi și stabili *acum* tot atîtea fapte, cîte le-a creat *același creier omenesc* din preistorie și *pînă acum 7 ani*?

— Să nu te uimească! Știi că numărul revistelor tehnice pe care le primește regulat Biblioteca Institutului politehnic din Iași trece de 3 000? Dar, de ce să-ți dau această informație pe care am auzit-o și eu de la alții și să nu mă refer la ceea ce am văzut cu ochii mei, astă iarnă, cînd am trecut ultima dată pe la Seminarul matematic „A. Myller" din Iași? Am întrebat cîte reviste se primesc acum și mi s-a spus 268. Gîndește-te! Două sute șasezeci și opt de reviste, în care se tratează numai probleme de matematici și desigur că acestea nu reprezintă toate revistele de pe glob. Or, cînd eram eu student și mă duceam acolo să citesc reviste, existau numai 111 titluri. N-am uitat cifra, măcar că de atunci au trecut 40 de ani: erau 111 reviste diferite de matematici, toate încuiate în dulapuri cu chei. Mă uitam la ele și mă gîndeam că avem cea mai bogată bibliotecă din tot sud-estul Europei. Biblioteca se compunea pe atunci numai din două camere, în care se vedeau cărțile și revistele puse în dulapurile cu geamuri și uși care ocupau destul de mult loc! Acum, seminarul are cinci camere, iar cărțile sînt așezate pe rafturi deschise și foarte dese de-a lungul pereților, pînă sus în bagdadie. Cine ar mai fi în stare să urmărească toate aceste

reviste, chiar dacă am presupune, prin absurd, că ar exista cineva care ar putea fi la curent cu toate problemele care se pun azi în matematici? Fă și tu o socoteală, de obicei revistele apar lunar, altele mai rar. Ca să citești un articol îți trebuie uneori o săptămînă, alteori mai mult sau mai puțin, să zicem un ceas, două... Admițînd că în 268 de reviste sînt în medie 1 000 de articole și socotind o oră de fiecare articol, ai nevoie de vreo 3 luni ca să parcurgi tot materialul venit într-o lună, socotind că citești 10 ore pe zi!

— Această problemă o punea și articolul despre care-ți vorbeam. Autorul observă că vertiginoasa creștere a volumului științei atrage după sine două probleme foarte spinoase: întîi depozitarea acestui material acumulat și apoi metode rapide de găsire a informațiilor de care ai nevoie!

— Tocmai aici voiam să ajung și eu. Din cea mai adîncă antichitate, creierul omului era și depozitul cunoștințelor stabilite de el. Hindușii transpuneau în versuri toate descoperirile, chiar și pe cele matematice, pentru ca astfel să fie ușor de reținut. Mai tîrziu, după ce a fost inventată scrierea, tot capul unor anumiți oameni era depozitul cunoștințelor stabilite, așa fel că atunci cînd alții aveau nevoie de ele obțineau aceste informații prin întrebarea directă a acelora care le posedau: magii, savanții, învățătorii etc. Tot ei au îndeplinit această funcție și mai tîrziu, cînd volumul cunoștințelor devenise destul de mare ca să nu mai poată fi reținut de o minte omenească. Anume ei extrăgeau esența scoasă din mulțimea acelor cunoștințe și o depozitau într-o singură carte. În aceasta găseau referințele la sursele din care s-au extras informațiile.

— Într-adevăr, însă o dată cu inventarea tiparului, cînd bibliotecile s-au înmulțit, devenind astfel accesibile unui număr tot mai mare de indivizi, la rîndul lor acești indivizi au contribuit la dezvoltarea bibliotecilor prin lucrările pe care le elaborau ei, acei ce primeau informațiile. Așa se face că azi chiar cele mai strașnice îmbunătățiri tehnice, bibliografia pe care ți-o pun la îndemînă revistele de recenzii, clasificate după cele mai precise specializări, tinde să fie depășită! Deși sînt foarte curios să știu cum se va soluționa această problemă în viitor, găsesc mult mai interesant să

urmăresc chiar acest proces de înstrăinare, care se infiltrează treptat, ca un virus, peste tot: în artă, literatură, știință, tehnică și chiar viața de toate zilele. Tu, om de știință, să te simți străin în chiar casa ta? Să nu te mai poți mișca nestingherit decît în cîteva încăperi, fiindcă toate celelalte sînt ocupate de necunoscuți?

— Da, asta a fost și tragedia lui Viviani, a reluat prietenul meu. În răspunsurile primite la problema propusă, el descoperă existența unor mijloace de investigație cu totul străine de mentalitatea lui. Fiind compuse din elemente deosebite de acelea a căror natură îi era familiară lui, el nu le mai putea urmări. Demonstrațiile primite de el nu se mai sprijineau nici pe figuri egale sau asemenea, nici pe construcții formate din drepte sau plane paralele din care să rezulte egalitățile sau rapoartele care conduc la dezlegarea problemei. El a găsit formule care închideau semne curioase, calcule cu litere, din care pricepea mai puțin decît dintr-o anagramă..., dar față de care nu a rămas indiferent, ci plin de admirație. De-abia acum a văzut că trăinicia acelui pod minunat pe care l-a construit el cu atîta migală ca să lege lumea lui cu lumea antică nu mai are nici un rost. Leibniz a găsit un drum nou, aruncînd doar o punte în altă direcție; trecînd pe puntea aceasta însă poți ajunge mai repede și mai ușor la rezultat. Probabil că metoda era mai potrivită cu cerințele vieții moderne, dar Viviani e prea bătrîn, cu ochi împăienjeniți nu poate să se mai avînte peste o punte, cu bîrnele care-i fug de sub picioare. Pe podul lui larg, cu parapet, se poate încumeta să păşească cu ochii închiși, dar pe acest drum va întîlni tot mai rar cîte un trecător... Vezi, cam același lucru se petrece și în zilele noastre... În matematica secolului al XX-lea nu se mai vorbește de un singur spațiu, de spațiul acela odihnitor și primitor cu trei dimensiuni, în care așezai cum îți plăceau toate dreptele și curbele, toate planele și suprafețele sau toate corpurile geometrice. Nu, acum există o mulțime de spații și de subspații, cu oricîte dimensiuni poftești: spații proiective, spații topologice, subspații ale spațiilor Finsler, sau Contau și multe, foarte multe altele. Dar nu ți-am enumerat

noile ramuri de sine stătătoare ale matematicilor, ca analiza numerică, teoria informațiilor, statistica etc.

— Bine, dar atunci în matematica modernă e un adevărat haos?

— De ce? Oare mulțimea stelelor de pe cer ți-a dat vreodată impresia de haos? De cîte ori nu m-ai oprit pe cînd rătăceam tîrziu în noapte, cum prevăd că ni se va întîmpla și azi, dacă nu vrei să coborîm îndată de aici, ca să cauți Lira, Andromeda cu Perseu, Pegas, Bouarul sau Văcarul, ba chiar să te războiești ca un Făt-Frumos cu Balaurul, care se cam ascundea printre Carul Mare și Carul Mic, ca după ce-l prindeai, să privești triumfător spre Casiopeea, căreia ție îți place să-i zici Coromîsla, cum o numea mama ta, care ți-a arătat-o întîi!

— Bine, dar în astronomie e altceva! Pe astronomi nu-i încurcă puzderiile de stele pe care le întîlnesc în orice parte a cerului ar încerca să-și îndrepte ei luneta, fiindcă ei și-au organizat cercetările pornind de la această situație!

— Dar și matematica modernă și-a organizat cercetările pornind de la această situație, la care era de așteptat să ajungă acum, cînd tehnica modernă a pus la dispoziția omului spațiul extraterestru cu imponderabilitatea lui cu tot! Am impresia că în epoca noastră se repetă, pe o scară mai largă, același proces de surprinzătoare dezvoltare științifică care s-a petrecut prin veacurile al XVI-lea și al XVII-lea! Atunci operațiile cu mărimi variabile, pulverizarea mărimilor finite în mărimi infinit mici și infinit de multe, operațiile cu numere negative sau complexe păreau paradoxale și nu puteau fi concepute de un spirit obișnuit să judece și să opereze numai cu numere constante, reale și pozitive sau numai cu segmente de lungime finită. Acele noțiuni însă s-au impus matematicienilor prin introducerea mașinilor în producție, prin perfecționarea navigației și prin întregul progres tehnic de atunci, fiindcă era necesară cunoașterea temeinică a legilor mișcării. Or, mișcarea implică procese de variație și de dependență între mărimi variabile în care variația trebuia să se poată face oricît de mică. Pentru mijloacele tehnice de atunci, inventarea logaritmilor a însemnat un admirabil și satisfăcător mijloc de simplificare

și de grăbire a calculelor, după cum pentru acestea de azi a trebuit să se inventeze mașina electronică de calcul. Atunci s-a lărgit domeniul aritmeticii prin introducerea calculului cu numerele algebrice. La rîndul ei, aritmetica, transformată în algebră, a cuprins și calculele cu numere complexe. Azi domeniul algebrei s-a extins *prin introducerea operațiilor cu orice fel de mărimi, de orice natură ar fi ele*. Și fiindcă aceste operații trebuiesc definite în așa fel ca să fie compatibile cu elementele considerate, iată-ne în fața *atîtor algebre cîte mărimi diferite se cer supuse operațiilor*: algebre de vectori, algebre de matrici, algebre de compoziție, subalgebre etc. Și tot așa, dacă atunci, stabilindu-se o corespondență între *punct ca element geometric* și *o pereche de numere algebrice* s-a creat geometria analitică și apoi cea diferențială, problemele de azi au impus o corespondență mult mai largă între geometrie, algebră și analiză, corespondență în care topologia a jucat rolul elementului de legătură.

— Bine, dar după cîte văd eu, te pricepi de minune în aceste probleme moderne, de ce te mai vaieți că ești un înstrăinat?

— Te înșeli, dragul meu! Tocmai aici e tragedia și durerea mea, că nu le pricep de loc! Lucrurile care ți le-am spus eu sînt vagi și la asta se rezumă aproape tot ce știu!

— Bine, dar dacă ai încerca să le studiezi sistematic, luîndu-le de la început, n-ai izbuti oare să te pui la curent?

— Tentația aceasta m-a încercat de mai multe ori, dar...

— Ai rezistat, nu? De ce?

— E greu să-ți explic! Mai întîi cred că este un fel de inerție a sistemului de gîndire! Se opune ori de cîte ori îi cer să foreze necunoscutul cu alte instrumente decît acelea pe care le cunoaște. Văd bine că nu ar fi greu să pătrund noua structură, că o dată înțelese elementele, problemele care se pun au un substrat analog prin generalizarea și înlănțuirea lor logică cu acelea pe care le cunosc și, totuși, în fața mea se pune un geam de sticlă prin care nu pot trece.

— Sparge-l!

— Nu, nu se mai poate. Sînt și eu ca un bătrîn așezat într-un fotoliu lîngă sobă. Focul arde domol și acolo, în odaie, e cald și bine. Afară, chiar sub fereastra lui, copiii se dau cu

săniuța sau se bat cu zăpadă. Spectacolul e desfătător prin energia care se cheltuiește transformată în rîs și bucurie. Privește cu drag și simte parcă în palme bulgării de zăpadă, bine bătuciți și rotunjiți pe îndelete cu grijă, așa ca să se prelungească cît mai mult senzația aceea plăcută de răceală. Totul îl cheamă afară și totuși... la ce bun ar mai încerca să treacă dincolo de geam... Nu-i nefericit și nu-i pare rău. Privește cîteva clipe la această dezlănțuire fragedă de bucurie nouă și apoi își continuă gîndurile lui vechi, a căror activitate îi dăruiesc bucuriile vîrstei lui. Da, dragul meu, sînt un înstrăinat față de mulțimea problemelor *noi* pe care le cercetează matematica. Pentru mine nu mai este posibilă vreo apropiere de ele. Dar sînt fericit că problemele vechi nu și-au epuizat farmecul lor. Așadar, nu mă pot plînge că nu am ce face! De altfel aș vrea să nu mă înțelegi greșit și să crezi că mă contrazic, afirmînd că *nu s-a săpat o prăpastie între matematica de la începutul veacului și aceasta de acum*. Nici vorbă! Problemele clasice au încă destule aspecte care se cer cizelate și prin revistele de specialitate nu au încetat să apară asemenea articole, însă ele nu mai sînt *la modă*, îs învechite ca și plugul cu boi, alături de tractor! Tot așa a fost și în veacul al XVIII-lea. Cu tot avîntul și terenul pe care-l cîștigau analiștii de partea lor, problemele puse de ei nu au provocat *o ruptură imediată și definitivă a legăturilor cu vechea matematică greacă*. Geometria sintetică a lui Euclid a continuat să atragă pe mulți matematicieni, deși nu mai era *la modă*. De pildă, în 1728, Guido Grandi va publica o carte foarte apreciată, care a stîrnit mult interes în lumea geometrilor prin frumusețea demonstrațiilor pur geometrice. Numele ei a fost *Flori geometrice*.

— Flori?

— Da. Rozete și clelii, cleliile fiind rozetele de pe o suprafață sferică.

— Clelii? De ce așa și nu pur și simplu rozete sferice?

— Fiindcă, după cîte îmi amintesc, el dedică această carte unei cucoane...

— Pe care o chema...

— Da, o chema...

— Atunci? probabil că nici Viviani nu și-a înecat durerea înstrăinării în vin...

— Desigur că nu. A găsit consolare în dragostea lui pentru geometrie și prin ea a învins oarecum depresiunea lui sufletească.

— Vrei să spui că a mai publicat vreo lucrare?

— Da! Și anume peste 9 ani, adică în 1701 — el moare în 1703 — apare ghicirea altei lucrări pierdute, ce aparținea lui Aristeu cel bătrîn și care se numea *Despre locurile solide*. De data aceasta, lucrarea a cărei reconstituire o încearcă nu a mai fost găsită ca să se poată stabili o comparație, așa cum a fost în cazul cărții lui Apolloniu. Viviani i-a pus ca titlu: *Ghicirea geometrică a locurilor solide, în cinci cărți care au fost pierdute, ale geometrului Aristeo cel bătrîn*.

— Pesemne că a existat încă un Aristeu, dacă acesta e „cel bătrîn".

— Nu se știe, dar așa se presupune.

— Și pe cînd a trăit Aristeu cel bătrîn?

— Prin veacul al IV-lea î.e.n., adică înainte de Euclid. Aceasta se cunoaște tot din cele opt cărți ale *Culegerii* lui Pappus, despre care ți-am mai vorbit. Acolo se găsesc date istorice și referințe relative la vreo 30 de autori. Despre Aristeu cel bătrîn se vorbește în cartea a VII-a. Anume, că înainte de Euclid a fost scrisă o lucrare despre *construirea liniilor*. Această lucrare reprezenta un studiu special, destinat numai acelora care au parcurs elementele geometriei, fiind astfel în stare să o înțeleagă. Aceste referințe au îndemnat pe mai mulți matematicieni care se ocupau cu studiul operelor geometrilor greci să încerce o reconstituire a acestor cărți pierdute. De pildă, la începutul veacului al XVII-lea a făcut-o Marino Ghetaldi, apoi Fermat... Pe Viviani l-au tentat *Locurile solide* încă din tinerețe, și ghicirea lor a fost terminată prin 1646. Atunci a vrut el să le dea la tipar. În 1673 obținuse aprobarea de imprimare.

— Ce înseamnă „*Locuri solide*"?

— Este o numire specifică dată de geometrii greci, prin care deosebeau ei curbele între ele. Dreptele și cercurile le numeau *locuri plane*, *conicelor*, adică elipsei, parabolei și hiperbolei, le spuneau *locuri solide*, probabil fiindcă toate

trei se obțineau prin secționarea unui con sau cilindru (figuri solide deci) cu un plan, iar celorlalte curbe, care nu făceau parte din locurile plane și solide, cum ar fi cuadratricea, conchoida, spiralele, le ziceau *locuri liniare*, însă Pappus spune că, deși intitulată *Locuri solide*, lucrarea lui Aristeu cuprindea și vreo trei sau patru *locuri liniare*. Pare și s-ar putea ca Viviani să fi imprimat, în 1701, această lucrare a lui din tinerețe din obligația de a-și demonstra activitatea științifică, condiție ca să poată primi în continuare pensia ce-i fusese acordată de către Ludovic al XIV-lea. Lucrarea este dedicată Regelui-Soare.

— Și cum a fost privită această nouă ghicire a sa?

— A fost o delectare pentru toți cei ce iubeau geometria antică, pentru că Viviani poseda perfect metoda de lucru a geometrilor greci, și deci era integrat perfect în modul lor de gîndire. El dă o mulțime de teoreme frumoase și riguros demonstrate. Prin aceasta, lucrarea prezintă încă și azi un anumit interes, mai ales fiindcă, după cum remarcă Gino Loria, ea arată cum își închipuia Viviani, și odată cu el toți matematicienii din veacurile al XVII-lea și al XVIII-lea nivelul științific al epocii în care s-a scris această operă.

— Bine, dar ar fi putut fi altul?

— O dată ce opera e pierdută, nu se poate afirma cu siguranță că stilul clasic pe care l-a folosit Viviani în această lucrare, *acela al lui Euclid și Apolloniu*, fusese însușit și de către matematicienii greci *de dinaintea lui Euclid*, în speță de Aristeu cel bătrîn! Atîta vreme cît nu mai există nici un criteriu de comparare a acestei lucrări cu vreo alta, de dinainte de Euclid, nu se poate afirma nimic. Nu-i exclus ca Viviani să fi mers mai departe decît a făcut-o Aristeu, cu atît mai mult cu cît teoremele stabilite de el nu se găsesc menționate nici la Pappus, nici la vreun alt comentator. Dacă vrei, am să-ți citez, atît cît îmi aduc acum aminte, una dintre primele probleme pe care le atribuie Viviani lui Aristeu.

— Desigur, sînt curios!

— Se consideră o secțiune conică, adică o elipsă, parabolă sau hiperbolă, și se duce într-un punct al ei normala la curbă. Se prelungește această dreaptă pînă întîlnește una

dintre axele conicei. Imaginează-ți acum lungimea segmentului de pe normală cuprins între punctul de pe curbă și punctul de intersecție dintre normala la curbă și axa conicei, căci avem nevoie de el. Din punctul de intersecție aflat pe axă se ridică o perpendiculară pe ea și se măsoară, începînd de la piciorul ei, lungimea despre care ți-am vorbit. Se obține astfel un nou punct, anume extremitatea segmentului perpendicular pe axa conicei. Dacă punctul de pe conică variază, o dată cu el variază și poziția acestui punct. Viviani, respectiv Aristeu, se întreabă care este locul geometric al acestui punct?

— Într-adevăr, e o problemă frumoasă, dar cred că trebuie să fie foarte greu de rezolvat.

— Asta depinde de cunoștințele celui ce o rezolvă. Pentru Viviani era un fleac. Și pentru un elev din școala medie care a învățat geometria analitică problema e destul de ușoară, dacă o tratează analitic. Pentru tine poate că-i mai grea.

— Desigur, totuși spune-mi care-i locul?

— În general e tot o conică de același gen cu conica dată, bitangentă ei. Adică, dacă s-a considerat o elipsă, locul este tot o elipsă, dacă s-a considerat o parabolă, și locul căutat este o parabolă, numai dacă s-a pornit de la un cerc, atunci locul nu mai este un cerc, ci o pereche de drepte! Viviani nu se mulțumește însă cu atît; el stabilește și multe variante ale acestei probleme, fiecare avînd farmecul ei specific.

— Da, așa fiind, cartea trebuie să fi trezit mult interes.

— Numai că prin calitățile ei cartea a fost considerată de matematicieni ca *un adaos* la lucrarea lui Aristeu, și nu ca o reconstituire a acesteia. Așa că, din nou entuziasmul lui Viviani a suferit o dezamăgire. Întîia, a fost cînd a înțeles că gîndirea antică, în toată admirabila ei splendoare, nu-i decît o metodă de cercetare a adevărului matematic și că, alături de ea, au apărut alte metode noi, tot așa de extraordinare, cerute de civilizația care se înfăptuia atunci. Însă, cu toată părerea mea de rău, a venit vremea să te desprinzi din raiul tău și să o pornim spre casă. Uită-te la steaua ciobanului, care te privește fără să clipească, parcă te-ar întreba: „Ce te faci dacă-ți iese înainte un lup?“

PROBLEMA PERSPECTIVEI

SAU POVESTEA COLABORĂRII DINTRE GEOMETRIE ŞI PICTURĂ

Odată, pe cînd coboram pîrîul Corlăţenilor, după o *plimbărică*, cum îi plăcea lui Teodor Solonar să numească excursiile începute în zori şi sfîrşite la amiază, ne-am întîlnit la o cotitură cu un bun prieten al meu, care stătea pe o buturugă şi desena.

— Bănuiesc eu cu cine eşti, mi-a spus Miti, întinzînd amîndouă mîinile către prietenul meu. Am ajuns aici azi-dimineaţă şi aveam de gînd să vă caut mai înspre seară. Mîine în zori vreau să mă duc la Arbore. Întîmplarea m-a scutit de osteneală, căci, drept să vă spun, necunoscînd bine drumul...

— Chiar întîmplare, am adăugat eu, privind cu înţeles spre tovarăşul meu de drum.

— Încă mai are curaj să vorbească, a ripostat el, adresîndu-se noului cunoscut. Dumnealui ţinea morţiş s-o apucăm pe Pîrîul Morii. A cedat numai ca să nu scape ocazia de a-mi face teoria tiraniei! Admiţînd că aş fi tiran, vreau să mai fac o victimă. Vă poftesc deci să mîncăm şi să sporovăim împreună, de nu aveţi cumva alte treburi!

— Bucuros, numai dacă-mi îngăduiţi să termin schiţa începută.

— Cum să nu! Noi o luăm încetul spre vale, unde vom face un popas, iar dumneata ai să ne ajungi din urmă cînd îi termina. Mă conformez aşa şi sfaturilor pe care le dă Leonardo da Vinci cînd spune: „Pictorul trebuie să fie singur, să privească cu atenţie ceea ce vede, să vorbească cu el însuşi, alegînd cel mai minunat aspect al fiecărui lucru pe care-l zăreşte...“

— Foarte adevărat, d-le Solonar. Tot el justifică sfatul aşa: „Dacă eşti singur, eşti numai al tău, dacă ai un tovarăş, nu-ţi vei aparţine decît pe jumătate şi chiar mai puţin, după indiscreţia tovarăşului tău!“

După-masă, atunci cînd Miti a început discuția, nu bănuiam că vom rămîne multe ceasuri tot acolo, în jurul mesei, cu paharele de vin și cu cestile de cafea golite și umplute în răstimpuri.

— Îmi spunea prietenul nostru că dv., domnule Solonar, mîncați cărțile cu linguroiul, dar nu-mi închipuiam că ați citit și *Tratatul despre pictură* al lui Leonardo da Vinci! Mai întîi fiindcă e o carte rară. Am căutat-o eu și pe la anticarii din București, unde găsești orice vrei, dar degeaba! Am citit-o de la bibliotecă. Dar dv. de unde ați citit-o?

Cel întrebat a rămas o clipă pe gînduri, apoi s-a ridicat zîmbind de pe scaun, s-a dus la dulapul cel cu cheie și s-a întors cu o carte legată în pînză albastră.

— Asta-i, a strigat Miti emoționat, luînd-o și răsfoind-o. Asta-i, am cunoscut-o după format. De unde o aveți? E a dv.?

Prietenul meu părea mai interesat să urmărească aceste manifestări de bucurie decît să răspundă la întrebări. A dat din cap, zîmbind în doi peri:

— A fost, dar acum nu mai este a mea! Oricum, nu-i cea de la Biblioteca „M. Eminescu" din Iași, pe care ai citit-o dumneata și pe care o cunosc și eu. Aceea e legată într-o pînză verde întunecat, însă e tot ediția din 1925, cu comentariile lui Péladan.

— Da, iată și sfatul citat de dv. cînd ne-am cunoscut, datorită căruia mă bucur acum de revederea acestui giuvaer! E aici, la p. 60, unde se află „Conseils et recettes". De cîte ori nu le-am citit! Am acasă și un caiețel cu note..., pe care, de altfel, nu l-am mai deschis niciodată!...

— Foarte bine spus, domnule Miti, nu știu nici eu de ce mai facem note! Mi-am propus de multe ori să nu mai scriu nimic și nu pot. M-am obișnuit așa, deși de citit rar le mai citesc... Cît despre carte, drept să-ți spun că, deși am găsit-o din întîmplare, la vederea ei m-am bucurat tot așa de mult ca și d-ta.

— Prin urmare vă place desenul și pictura. Poate că și desenați?

— În loc să-ți răspund eu, te rog să întorci foile, pînă la pagina unde încep „Sfaturile...", ca să recitim de acolo răs-

punsul împreună: „Sînt mulți oameni care doresc și le este drag să deseneze, dar cărora le lipsește talentul...". Mai este undeva în carte ceva foarte frumos, dar nu-mi mai aduc bine aminte unde... O comparație cu matematica...

— Da, o știu și o găsesc eu îndată. E pe la început, unde vorbește despre știință în general. Iată: „Științele imitabile sînt acelea în care elevul ajunge pe profesor și aduce roade la fel cu ale lui: ele sînt folositoare și merită să fie imitate, dar ele nu egalează ca desăvîrșire științele care nu pot fi lăsate moștenire, ca celelalte. Printre științele neimitabile, pictura vine în primul rînd: nu o poți preda aceluia pe care natura nu l-a înzestrat, spre deosebire de matematică, din care elevul primește atîta cît îi dă învățătorul. Pictura nu se copiază ca literele, unde copia prețuiește tot atît cît și originalul, ea nu se mulează ca sculptura, în care mulajul reproduce originalul..."

Încîntați, reciteau cu voce tare aceste rînduri, cînd pictorul, cînd prietenul meu, iar eu îi ascultam. Mi-au atras atenția mai ales unele fraze, pe care le sublinia, prin repetare Teodor Solonar: „Pictorului îi este necesară matematica, aparținînd artei sale. ...Studiază întîi știința, apoi va veni practica acestei științe. Perspectiva este ghidul și ușa, fără ea nu se poate face nimic bun în pictură".

— Drept să-ți spun, a continuat el, după ce a terminat de citit aceste rînduri, grozav de mult doream să aflu ce a scris Leonardo da Vinci despre perspectivă și cum a privit-o el. Și am aflat acestea în capitolul al VII-lea din acest tratat, capitol care se numește „Despre perspectivă".

— Dacă-i vorba despre perspectivă, nu numai Leonardo da Vinci a fost preocupat de stabilirea legilor ei. Cu mult înainte...

— E foarte adevărat, l-a întrerupt celălalt, nerăbdător. Știu bine că perspectiva a fost cercetată încă din antichitate, de către greci, care erau și mari amatori de teatru. O amintește Vitruviu în cele *10 cărți despre arhitectură*.

— O carte minunată! Sînt fericit că a apărut în traducere românească, fiindcă așa a devenit un prilej de delectare pentru mulți dintre cei care știu să guste și alte plăceri decît cele primitive sau cvasiprimitive, a adăugat Miti.

— Atunci hai să o aduc și pe ea aici la sfatul nostru, a spus gazda. Și punînd-o pe masă a continuat: Să citesc despre greci chiar de aici, din prefața la cartea a VII-a: „Pentru prima oară la Atena, pe cînd Eschil punea în repetiție o tragedie, Agatharchus a zugrăvit decorul acestei piese și a lăsat o scriere despre această lucrare. Îndemnați de aceeași idee, Democrit și Anaxagora au scris și ei asupra aceluiași subiect cum, fixîndu-se centrul într-un anumit loc, liniile trebuie să răspundă după o lege naturală la direcția privirii și la împrăștierea razelor, pentru ca anume imagini... să redea în picturile scenelor înfățișarea exactă a clădirilor și pentru ca elementele acestora, figurate pe fațade drepte și plane, unele să pară că merg către anume puncte de fugă, altele că vin în fața ochilor noștri".

— Stați, măi oameni buni, că n-am priceput nimic, am întrerupt eu. Vorbiți de *puncte de fugă* și mă întreb unde vreți să mă alungați? Mi-a fost destul de bine și aci, iar dacă-mi lămuriți cît de cît problema aceasta a perspectivei nu fug nicăieri. Insist asupra acestui lucru acum, fiindcă tot în tovărășia dumitale, dragă Miti, am asistat la multe discuții în legătură cu mijloacele estetice prin care un pictor caută să creeze prin imagini realitatea cernută prin sita lui sufletească. Totuși, despre această colaborare dintre matematică și pictură, despre care văd că vorbește Leonardo da Vinci, nu te-am auzit vorbind și cred că ar merita osteneala! După cîte știu, desenul în perspectivă, deși executat pe o foaie plană, cum e un perete, o pînză întinsă pe un cadru plan, o foaie de hîrtie, o scîndură sau mai știu ce alt material cu această calitate bidimensională, dă iluzia de adîncime și relief a spațiului, forma obiectelor din natură fiind imitată așa de perfect, încît produce aceeași impresie ca și obiectele înseși. Găsesc foarte interesant acest procedeu și, fiind vorba de matematici, aș vrea să-l rog pe prietenul Teodor să-mi explice și mie care-s legile geometrice ale perspectivei. Nu cred să am pretenții irealizabile, întîi fiindcă m-a mai spurcat el cu probleme de matematici și apoi fiindcă această problemă nu poate fi cine știe ce greu de priceput, dacă o pricepe și un pictor!...

— Deși mi-a venit pe limbă povestea cu broasca din fabulă, o las baltă, pentru că ideea ta e foarte bună, a ripostat Miti. Drept să-ți spun, aș vrea să aud și eu cum expune această problemă un adevărat geometru. Mi se vor mai lumina astfel cîteva puncte, care lîncezesc cam de mult în obscuritate!

— Sînt dezolat, dragii mei prieteni, că nu găsiți în mine *un adevărat geometru*. Cunoștințele mele de geometrie nu se ridică pînă la asumarea acestui titlu, așadar...

— Așadar urmează, că ai să ne spui ce știi despre perspectivă fără să-ți asumi acest titlu, și asta ne ajunge!

— Bine, în aceste condiții am să vă spun ce știu, deși sînt sigur că domnul Miti nu are nevoie de lămuririle mele. Din contra, sper să-mi lămurească el mie anumite probleme în legătură cu latura imitativă a unei opere de artă!

— Fiindcă eu nu voi avea nici o replică în discuția care urmează, îmi joc rolul la început, observînd că în latinește *perspicere* înseamnă *a vedea prin*, *a vedea peste* sau *a vedea lămurit*. Probabil că de aici vine numirea de perspectivă, numire care trebuie să fi circulat încă din evul mediu.

— Da, a început Teodor Solonar, numirea s-a răspîndit de atunci, dar, după cum spune Vitruviu, regulile de perspectivă au fost cunoscute din antichitate, și anume de prin veacul al V-lea î.e.n. de către Anaxagora și Democrit, primul probabil contemporan cu Agatharchus.

— Vitruviu amintește numai despre Agatharchus, fiindcă el a introdus pentru prima oară decorul pictat după regulile perspectivei în Atena, dar cea mai veche pictură în perspectivă care se cunoaște datează din timpul civilizației cretane. Este o frescă rămasă pe unul dintre zidurile palatului din Cnossos, a intervenit Miti.

— Așa-i. Însă nu se știe nimic mai mult despre istoria acestor urme, după cum nu se mai știe nimic nici despre lucrările lui Anaxagora și Democrit. Cea mai veche lucrare scrisă care s-a păstrat pînă azi este din veacul al III-lea î.e.n., anume *Optica* lui Euclid. Aici sînt expuse principiile perspectivei. Însuși cuvîntul *optică* are în grecește acest înțeles. Euclid postulează că lumina se propagă în linie dreaptă, însă ca toți platonicienii Euclid credea că razele de

lumină pornesc din ochi și formează un con, care are ca bază conturul obiectului, în loc să considere că razele luminoase pleacă de la obiect înspre ochi. De puțină importanță în ceea ce privește consecințele geometrice, ipoteza o găsim și la alți autori posteriori. De pildă, în cartea lui Heron din Alexandria (veacul I e.n.), intitulată *Dioptrica*, din care s-au păstrat unele fragmente, în cartea lui Ptolemeu din veacul al II-lea e.n. și în *Colecțiile* lui Pappus din Alexandria, veacul al III-lea e.n. De la greci, acest studiu a fost preluat de arabi, sub numele de „știința aparențelor". E cunoscută în special lucrarea lui Ibn al-Haitham sau Alhazen din veacul al X-lea, datorită faptului că ea a fost tradusă mai tîrziu în latinește de către Gerhard din Cremona.

— E adevărat. Știu și eu că din veacul al XII-lea pictorii și arhitecții italieni încep să fie preocupați îndeaproape de problemele de perspectivă, a adeverit Miti.

— În această privință pot adăuga și eu ceva. În universitățile medievale, perspectiva era unul dintre obiectele de studii. Prin secolul al XIII-lea, Roger Bacon se ocupă și de perspectivă, în lucrarea sa principală, *Opus majus*.

— În veacul al XIII-lea, a reluat Teodor Solonar, găsim mai multe lucrări importante despre perspectivă. Mai întîi o prelucrare a lui Vitello, după *Optica* lui Euclid, intitulată *Perspectiva*, alta a lui John Peckham, bazată pe lucrarea lui Alhazen, avînd ca titlu *Perspectiva comuni*, apoi una a lui Albertus Magnus. Au mai fost și altele, care s-au păstrat în manuscris și s-au tipărit cîteva secole mai tîrziu. Nici una dintre aceste lucrări nu reprezintă însă un studiu sistematic și documentat despre perspectivă, ci numai dezvoltarea unor anumite idei de bază, enunțate de Euclid: de pildă, că imaginea unui corp apare prin intersecția dintre piramida formată de razele care pornesc din ochiul observatorului — numit punct de vedere — înspre acel corp și planul tabloului sau că există un punct de fugă al liniilor paralele...

— Bine, dar ce-i *punctul de fugă*? V-am mai întrebat o dată și tot nu m-ați lămurit!

— Punctul de fugă este legat de imaginea unui fascicul de drepte paralele desenate în perspectivă. În perspectivă dreptele paralele se schimbă de cele mai multe ori, în drepte care

se întîlnesc într-un punct, fie în planul tabloului, fie în afara lui. Acest punct de concurență al imaginilor acelor drepte care sînt paralele în spațiu se numește *punct de fugă*, pentru că înspre el *fug* toate dreptele care în spațiu sînt paralele.

— În fine, știu și eu ce-i un *punct de fugă!* Iată o noțiune de care aveam un fel de frică să mă apropii singur! Credeam că-i ceva complicat și văd că-i destul de simplu. Așadar, fiecare fascicul de drepte paralele din spațiu are punctul lui propriu de fugă și determinarea lui asigură iluzia paralelismului?

— Desigur, a intervenit Miti. Numai că, fiind obișnuiți să considerăm că liniile paralele nu se întîlnesc, noțiunea punctului de fugă s-a impus și pictorilor tot așa de greu ca și ție. De-abia pe la mijlocul veacului al XIV-lea găsim în tablourile lui Giotto, ale fraților Lorenzetti sau ale lui Jan van Eyck punctul de fugă al liniilor dintre dușumele sau dintre scîndurile de la plafon care mergeau în adîncime.

— Prima contribuție importantă la studiul perspectivei, a reluat Teodor Solonar, apare la începutul veacului al XV-lea și se datorește arhitectului florentin Filippo Brunelleschi. El arată că un tablou poate crea o desăvîrșită iluzie a spațiului cu trei dimensiuni numai dacă punctul de vedere, adică ochiul observatorului, este situat la o distanță de tablou care să corespundă cu distanța reală. Tot lui i se datorește noțiunea tabloului fictiv, transparent, care se interpune între observator și obiect, și noțiunea de linie a orizontului. Atît el, cît și elevii lui, Massacio și Paolo Uccello, folosesc aceste noțiuni în picturile lor. Totuși, meritul de a fi compus primul tratat sistematic despre perspectivă îi revine lui Leon Battista Alberti. În cartea sa *Despre pictură*, el introduce în locul tabloului transparent o rețea cu ochiuri pătrate, prin care urmează să fie privit obiectul ce trebuie desenat. Dintre problemele mai dificile din punct de vedere practic, el rezolvă pe aceea a reprezentării mai multor segmente egale, așezate unul în urma celuilalt, și arată că perspectiva cercului așezat într-un plan neparalel cu planul tabloului este o elipsă.

— Problema reprezentării cercului în perspectivă a preocupat pe mulți pictori. Știu că Uccello a desenat pentru pri-

Fig. 24
Leonardo da Vinci

ma oară și *după multă trudă* un cerc, exact în perspectivă!

— Acestea sînt numai începuturi, căci pasiunea pentru studiul perspectivei atinge apogeul în cursul veacului al XV-lea. Pierro della Francesca lasă în manuscris lucrarea *Despre perspectiva în pictură*, Leonardo da Vinci cartea aceasta a noastră, publicată pentru prima dată în 1651. După ea a apărut în anul următor prima traducere franceză, cum se menționează aici în prefață.

— Dar de ce ați spus *cartea noastră?* După cîte mi-amintesc nu-i nici măcar a dv.? a ținut să precizeze Miti.

— De! Așa m-a luat și pe mine gura pe dinainte! a răspuns zîmbind hîtru Teodor Solonar. Revenind la aceste două tratate, trebuie semnalat că amîndoi autorii introduc o nouă noțiune importantă, aceea de *scară perspectivă* a tabloului,

adică arată pictorului cum poate stabili raportul dintre mărimea imaginilor desenate și mărimea corespunzătoare a volumelor reprezentate.

— Această problemă este foarte complicată, a spus Miti, căci aici nu este vorba de o reducere la scară, așa cum se obișnuiește cînd faci o hartă. În cazul unei picturi în perspectivă, părțile aceluiași corp trebuie desenate la scări diferite, scări care depind de distanța de la punctul de vedere la planul paralel cu planul tabloului în care se află partea respectivă a corpului de desenat. Știind aceasta nici nu vă închipuiți cîtă admirație îmi stîrnesc mie schițele perspective rămase de la Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, de la Rafael sau de la alți pictori din Renaștere. Ele arată nu numai erudiția, dar și o pasiune tot așa de puternică pentru geometrie,ca pentru desen și pictură, pentru că acele schițe cuprind soluțiile multor probleme geometrice destul de complicate.

— Ai dreptate, domnule Miti! Geometria și optica lui Euclid formau atunci studiile de predilecție ale marilor artiști. Ne-o arată Rafael, pictînd *Școala din Atena*, unde grupul matematicienilor este așezat chiar în fața templului științei, iar în tablou au fost observate cu strictețe toate regulile cunoscute atunci ale perspectivei.

— Leonardo da Vinci, Rafael și Michelangelo au atins apogeul artei lor bazate pe știința perspectivei. Alături de ei trebuie să-i așezăm pe Tizian Vecellio, care adaugă la perfecțiunea desenului și splendoarea coloritului, dar și pe Albrecht Dürer.

— Și Albrecht Dürer a scris o carte despre perspectivă. *Cercetări despre măsurările cu rigla și compasul*, inspirată probabil de lucrările lui Pierro della Francesca și Leonardo da Vinci, pe care se pare că le-a cunoscut atunci cînd a vizitat Italia. Am în caietul meu de note un pasaj din prefața acestei lucrări, din care reiese concepția despre artă a lui și a contemporanilor săi. Iată-l: „Deși îndemînarea necesită numai o mînă liberă, opera executată în acest caz este inconștientă și făcută numai după fantezie. Privind această operă, pictorii înțelegători și adevărații artiști trebuie să rîdă de orbirea acelor executanți, fiindcă unei adevărate înțelegeri nimic nu-i apare mai displăcut decît falsitatea în pictură,

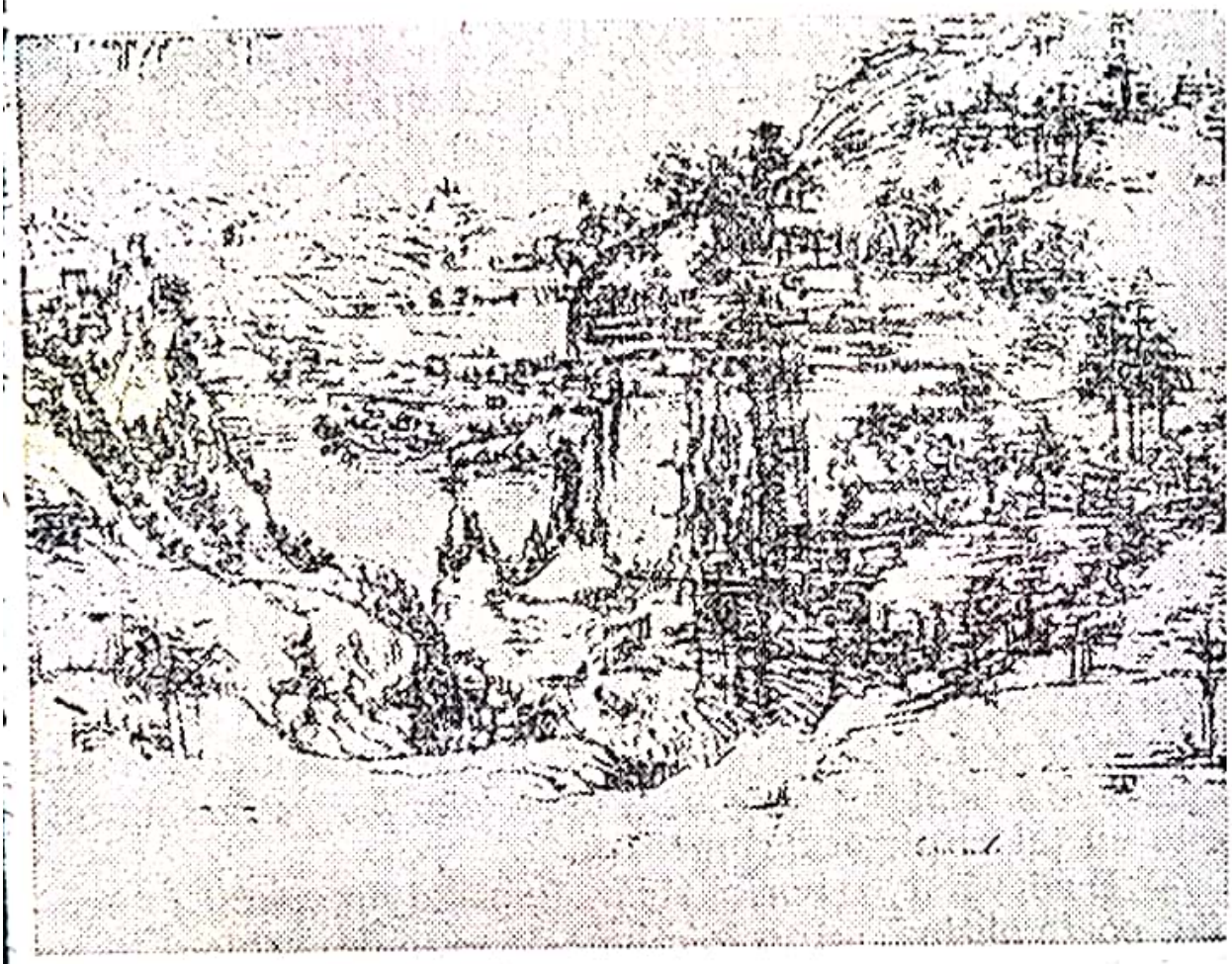


Fig. 25
Peisaj de Leonardo da Vinci

chiar dacă acestea au fost pictate cu toată sîrguința. Faptul că asemenea pictori găsesc plăcere în greșeala lor vine de acolo că ei n-au învățat arta măsurării, fără de care nu poate exista și nu poate fi un meșter adevărat".

— Acum vreo patru veacuri și mai bine, pe cînd nimeni nu bănuia că s-ar putea inventa un aparat fotografic — fără să mai vorbesc de fotografia în culori sau de stereoscopie — asemenea păreri puteau fi valabile, a spus Miti. Atunci executarea unui tablou în care să fie redate atît asemănarea portretistică naturală, cît și deplina senzație spațială era într-adevăr o măiestrie, o artă pe care numai cîțiva oameni din toți pe care-i cuprindea pămîntul erau în stare să o vădească. Pentru a realiza aceasta, pe lîngă talentul lor neobișnuit, acei pictori se mai străduiau îndelung ca să cunoască nu numai tehnica fabricării și aplicării culorilor, ci și metodele de rezolvare ale multor probleme de geometrie. Leonardo

da Vinci, Michelangelo, Rafael, Tizian sau Albrecht Dürer au fost totodată savanți și artiști. Savanți întrucît au căutat și au descoperit secretul desenului perspectiv, ale cărui legi nu erau toate cunoscute pe atunci și artiști, fiindcă au desfășurat geniul lor în modul de a dispune grupurile și formele, în expresia sentimentelor și a vieții sufletești care se vedea fremătînd pe chipurile omenești, în jocul de lumini și umbre dintre culorile armonios îmbinate. Totuși, n-aș vrea să exagerez. Țin să accentuez că și înainte de a se cunoaște legile perspectivei, mulți artiști știau cum să redea în mod instinctiv senzația spațială a obiectelor. Azi se cunosc perfect toate legile perspectivei. Nu rezultă însă că cine le cunoaște este *un artist*, și nici că un perfect desen în perspectivă are întotdeauna și o valoare artistică ! Pentru aceasta ar trebui să nu-i lipsească acel ceva care deosebește *arta adevărată* de *meserie* sau de *tehnică*. Calitatea *imitativă* singură nu-i un criteriu de apreciere a unei opere de artă, după cum *perspectiva* nu mai este un țel al pictorului modern.

— E adevărat, azi orice tînăr, folosind un aparat fotografic, poate obține, într-o fracțiune de secundă, tabloul în culori și cu o perspectivă desăvîrșită fie a celui mai aglomerat centru dintr-un oraș, fie a celei mai tulburătoare stînci de la marginea mării sau a oricărui chip omenesc. Pentru aceasta el nu mai are să-și bată capul nici măcar cu aprecierea timpului de expunere, fiindcă și acesta îi este indicat de o celulă fotoelectrică. Am ajuns astfel la o problemă pe care te rog pe d-ta, domnule Miti, să mi-o lămurești: Cum privești d-ta și ce se înțelege azi prin valoarea unei picturi?

— Drept să vă spun că eu nu vă pot răspunde la aceste întrebări cu aceeași precizie și rigurozitate cu care îmi veți putea formula dv. legile perspectivei ! Aici părerile sînt împărțite și în multe privințe va trebui să acceptați, în locul unei definiții afirmative, niște negații cu valoare oarecum de dogmă, cum este aceasta: „În domeniul picturii imitarea obiectelor nu are o valoare în sine". De pildă, Cézanne spune că „a picta după natură nu înseamnă, pentru un impresionist, să pictezi obiectul, *ci să realizezi senzațiile pe care ți le dă el*". Așadar, Cézanne cerea obiectelor pe care le picta *să se învîrtă, să se îndepărteze și să trăiască*, căci numai în felul

Fig. 26
Strada Mare din Iași în 1845. I. Rey și P. Müller

acesta ele sînt creatoare de senzații. Criticii de artă au spus despre optica lui că *se află mai mult în creier decît în ochi*, observație cu care Cézanne însuși era de acrod. Vorbesc de Cézanne pentru că și acest mare pictor impresionist și-a pus întrebările pe care mi le-ați pus dv. și, ca să găsească un răspuns, a trăit multe momente de îndoială și de depresiune sufletească. A frecventat muzeele și a studiat mijloacele de exprimare ale pictorilor de dinaintea lui. Uneori, zile de-a rîndul sensibilitatea lui neliniștită era copleșită de formele vechi. A făcut numeroase copii după tablourile celebre, sperînd să le smulgă astfel secretul. Nu l-a descoperit, dar a înțeles ceva mai de preț, anume că valoarea oricărei opere de artă este subiectivă și personală, că marii artiști s-au încadrat în epoca lor și au fost expresia acelei epoci. Ca să fiu mai clar, să luăm de exemplu tablourile celebre cu subiecte luate din istorie, din literatură sau din viață, pictate prin

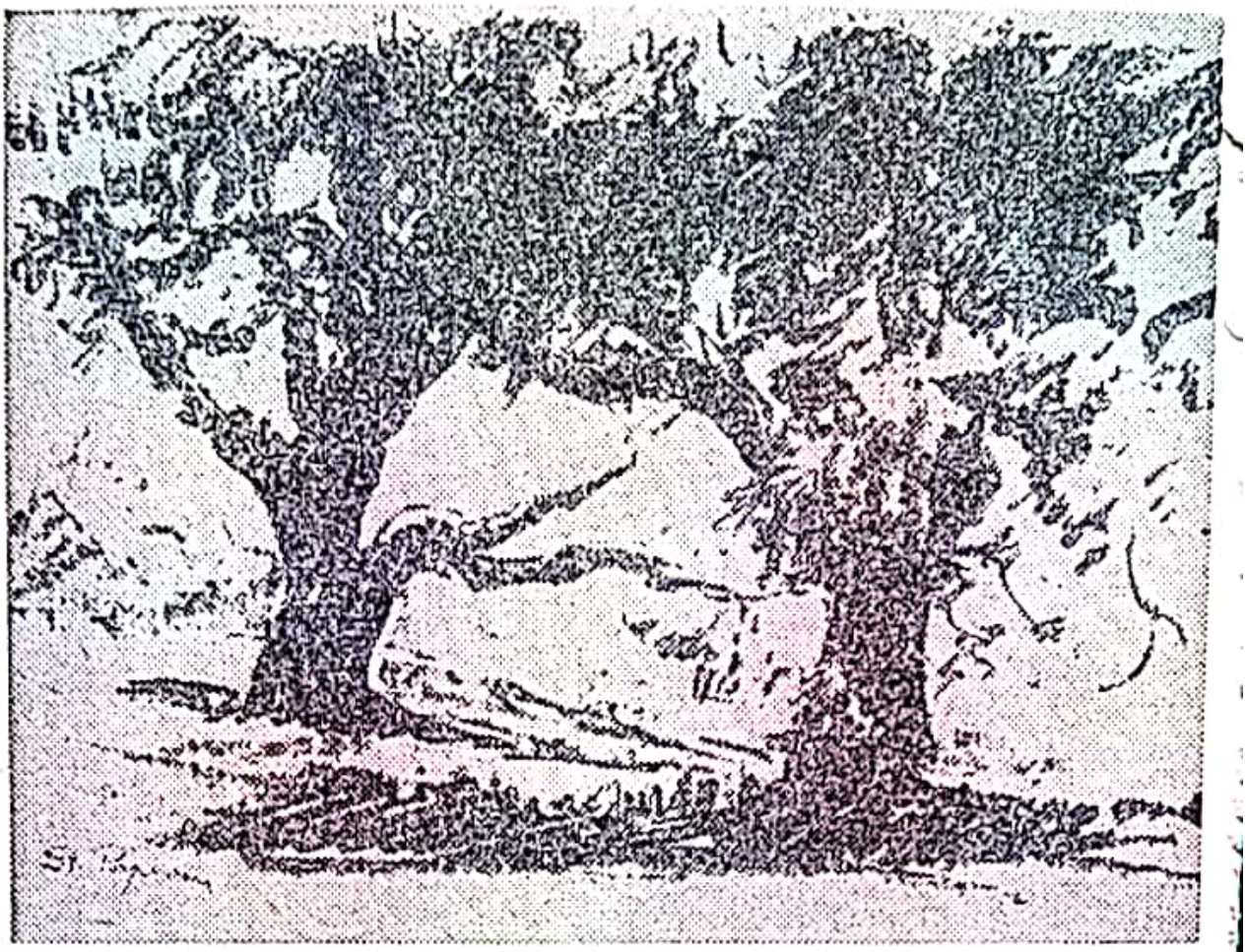


Fig. 27
Nuci. Ştefan Popescu

secolele XV—XVII. Pe lîngă calităţile lor plastice, aceste opere au răspuns şi cerinţelor sociale de atunci, ele fiind singurul mijloc vizual de popularizare a unor opere literare sau a unor idei. Acele picturi, prezentate în formă de tablouri sau de fresce, erau necesare atunci tocmai prin calitatea lor descriptivă. Prin această *calitate descriptivă* ele instruiau, educau sau amuzau pe omul de rînd, care nu avea la îndemînă cărţi, nu putea sau nu avea timp să citească, cărţile fiind atunci tot aşa de rare cum erau şi ştiutorii de carte. Pentru pictorul de azi, realizarea unui asemenea tablou nu mai are sens, căci marele public găseşte povestirea mai amplu, mai clar şi mai emotiv redată într-o sală de cinematograf. Filmul în culori înlocuieşte şi face inutilă pictura cu subiect istoric, dramatic sau sentimental. La fel s-a întîmplat şi cu arta portretului, aşa de dezvoltată în veacurile trecute. Azi o fotografie în culori redă asemănarea mai fidel, costă mai puţin

și nu cere timpul de poză necesar unui portret. Așadar, iată că o dată cu noile realizări ale tehnicii moderne, și mijloacele de expresie artistică trebuie să sufere schimbări radicale. Pictura nu mai este nici literatură și nici fotografie. Numărul știutorilor de carte a crescut enorm și totodată cartea imprimată s-a răspîndit în exemplare ușor de obținut. Ca să se conformeze epocii lui, pictorul de azi trebuie să-și limiteze domeniul la ceea ce este specific picturii în viața actuală, mai fragmentată și mai rapidă în manifestările ei decît în epocile precedente. Artistul trebuie să exprime ceea ce este particular în natura sa interioară sau în epoca sa prin mijloacele specifice artei sale, ținînd seama că realitatea nu se exprimă nici prin perspectivă, adică redînd cu fidelitate conturul formei sau iluzia volumului și a depărtării, nici prin umbre și gradarea intensității coloritului, nici prin în-

Fig. 28
Peisaj ieșan. Teodor Pallady

locuirea nimfelor și cupidonilor prin personaje reale. Noțiunea de *realism* se schimbă o dată cu schimbarea raportului dintre om și universul care-l înconjură. Impresioniștii sînt primii care s-au smuls din tirania subiectului, a povestirii tabloului. Dar, încercînd să se degajeze de latura imitativă a picturii, ei n-au considerat decît culoarea, neglijînd aproape complet atît forma, cît și linia. Desigur că acesta nu putea fi singurul răspuns și nici n-a fost un răspuns satisfăcător, de aceea revoluția impresioniștilor a atras după sine altele. Unii dintre artiști au căutat mijloacele de exprimare plastică a emoției artistice în linii, alții în formă, alții într-o combinare de linii, formă și culoare. Aceasta pentru că mijloacele estetice sînt expresia unor experiențe simțite și trăite. Ele reprezintă veșnicele încercări ale unui mecanism interior — care-și găsește în el deplina lui justificare — de a exprima percepția lumii noastre pline de noi și nebănuite posibilități de realizare...

— După cîte văd, discuția voastră a deviat de la subiectul propus, care erau perspectiva și legile ei. Nu s-ar putea să vă întoarceți la el?

— Ba da, spune-mi numai de unde să o iau?

— Cum de unde? Doar spuneai că Leonardo da Vinci și toți ceilalți pictori din veacul al XV-lea nu s-au putut degaja complet de empirism.

— Așa-i. În veacurile al XVI-lea și al XVII-lea, lucrările despre perspectivă se înmulțesc. Frederic Commandino, unul dintre cei mai de seamă cunoscători a operelor grecești, traduce și comentează lucrarea lui Ptolemeu *Planisfera*, în care sînt cuprinse principiile proiecției stereografice, cu alte cuvinte modalitatea de reprezentare a unei sfere pe un plan, considerînd ca plan de proiecție planul ecuatorului și ca centru de proiecție unul din cei doi poli corespunzători planului. Dar această lucrare a părut prea abstractă artiștilor. Se simțea nevoia unor scrieri în care latura practică să-și găsească o îmbinare potrivită cu cea teoretică. O asemenea lucrare este realizată de arhitectul Iacob Barozzi: *Le due regole della prospettiva practica*, tipărită la Roma, la sfîrșitul veacului al XVI-lea. Ea a avut mult succes, fiind chiar comentată de Ignatio Danti, traducătorul *Opticii* lui Euclid și bun

cunoscător al problemelor de perspectivă. Prin stilul riguros științific, prin multele note asupra cercetărilor anterioare și, mai ales, prin demonstrarea unor teoreme particulare și necunoscute despre punctul de fugă, cartea se deosebește de toate celelalte lucrări apărute pînă atunci și e tradusă în limbile franceză, engleză, germană, latină și rusă. Petru cel Mare a comentat-o în clipele lui de răgaz. Dar opera care avea să dea perspectivei caracterul pur matematic, prin demonstrarea teoremei generale asupra punctului de fugă, se datorește lui Guido Ubaldo del Monte și a fost publicată în 1600, sub titlul *Perspectiva, libri sex*. Guido Ubaldi a fost elevul lui Commandino și prietenul lui Galilei. Prin originalitatea ei, lucrarea lui are valoare nu numai pentru matematici, ci și pentru cultura universală. Cu ea se elimină din studiul perspectivei orice urmă de empirism. În cele 25 de probleme generale ale perspectivei, el coordonează toate rezultatele de pînă atunci și arată importanța pe care o are ochiul observatorului ca să realizeze iluzia perfectă a adîncimii și a reliefului. Cam în același timp, în Olanda, un alt matematician renumit, Simon Stevin, publică *Scenografia vulgară zisă perspectivă*, în care se pune pentru prima oară problema inversă perspectivei.

— Cum adică? Se dă imaginea în perspectivă și să se afle poziția din spațiu a obiectului desenat?

— În linii generale cam așa. Aceste două lucrări, ale lui Ubaldi și Stevin, au dat perspectivei o bază teoretică definitivă. Preocupările viitoare se vor îndrepta numai spre perfecționări de natură practică, aducîndu-se simplificări în metoda de desenare a imaginilor. După aceste generalități, hai să privim problema mai în detaliu. Din punct de vedere matematic sînt de reținut următoarele două moduri diferite de reprezentare în perspectivă: perspectiva paralelă și perspectiva centrală. *Perspectiva paralelă* este convențională, deoarece corpurile din spațiu sînt proiectate pe planul desenului printr-un fascicul de raze paralele cu o direcție dată. E ca și cum s-ar presupune că ochiul observatorului ar fi așezat la infinit și ar privi de acolo obiectele (fig. 29). În acest caz, liniile verticale din spațiu, precum și cele paralele, păstrează pozițiile respective și în desen. *Perspectiva centrală*

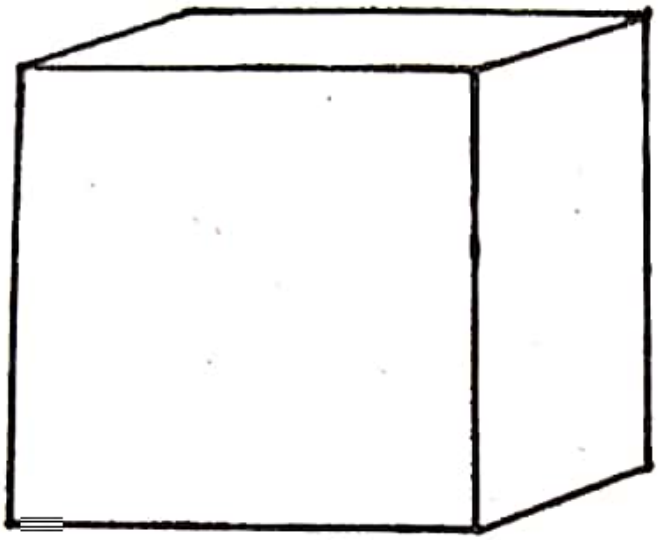


Fig. 29

este perspectiva propriu-zisă, căci reprezentarea figurii din spațiu se obține proiectînd-o pe planul desenului cu ajutorul unui fascicul de raze care trec printr-un punct *O*, numit *punct de vedere* și presupus a fi ochiul observatorului. Planul

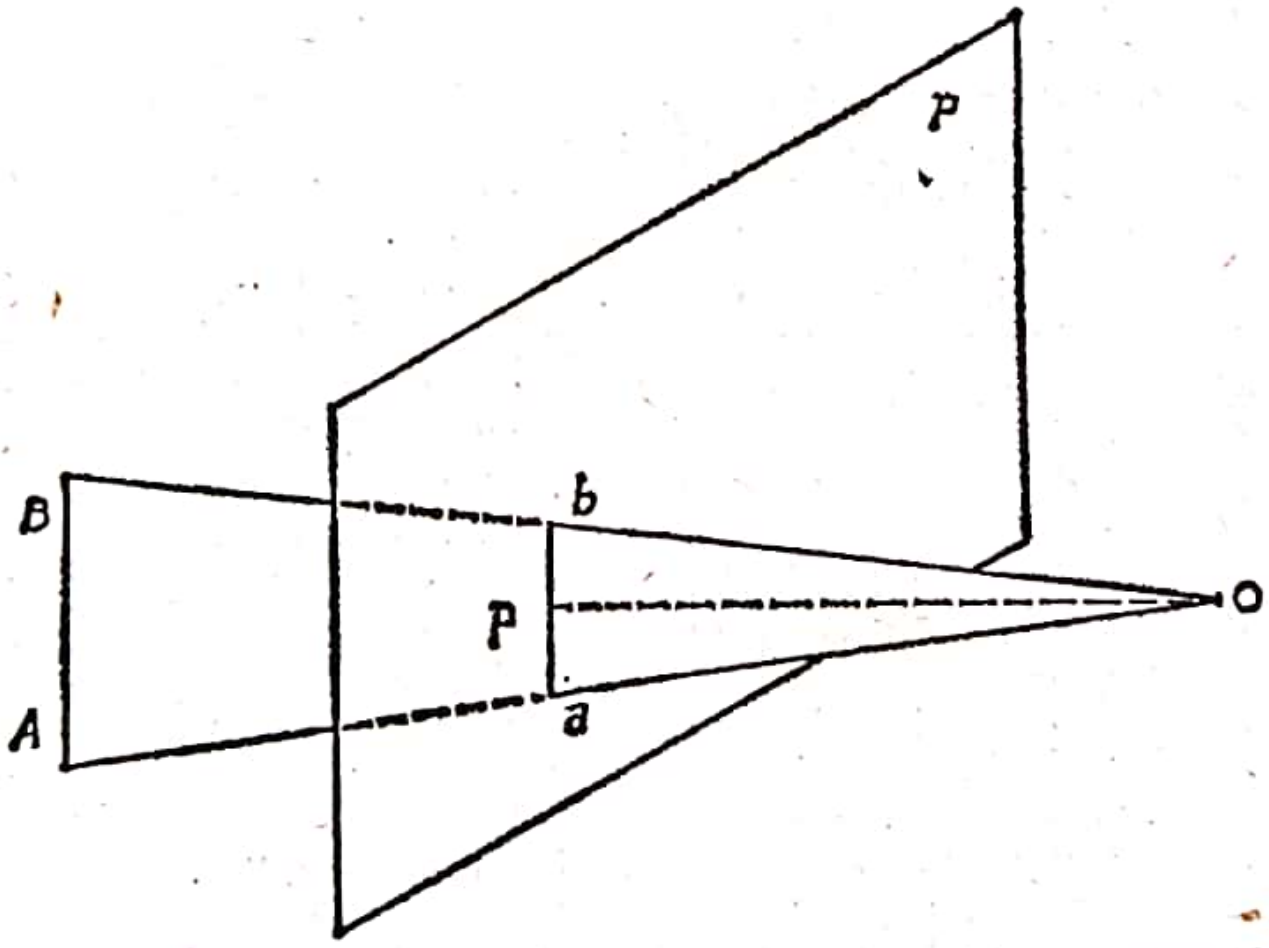


Fig. 30

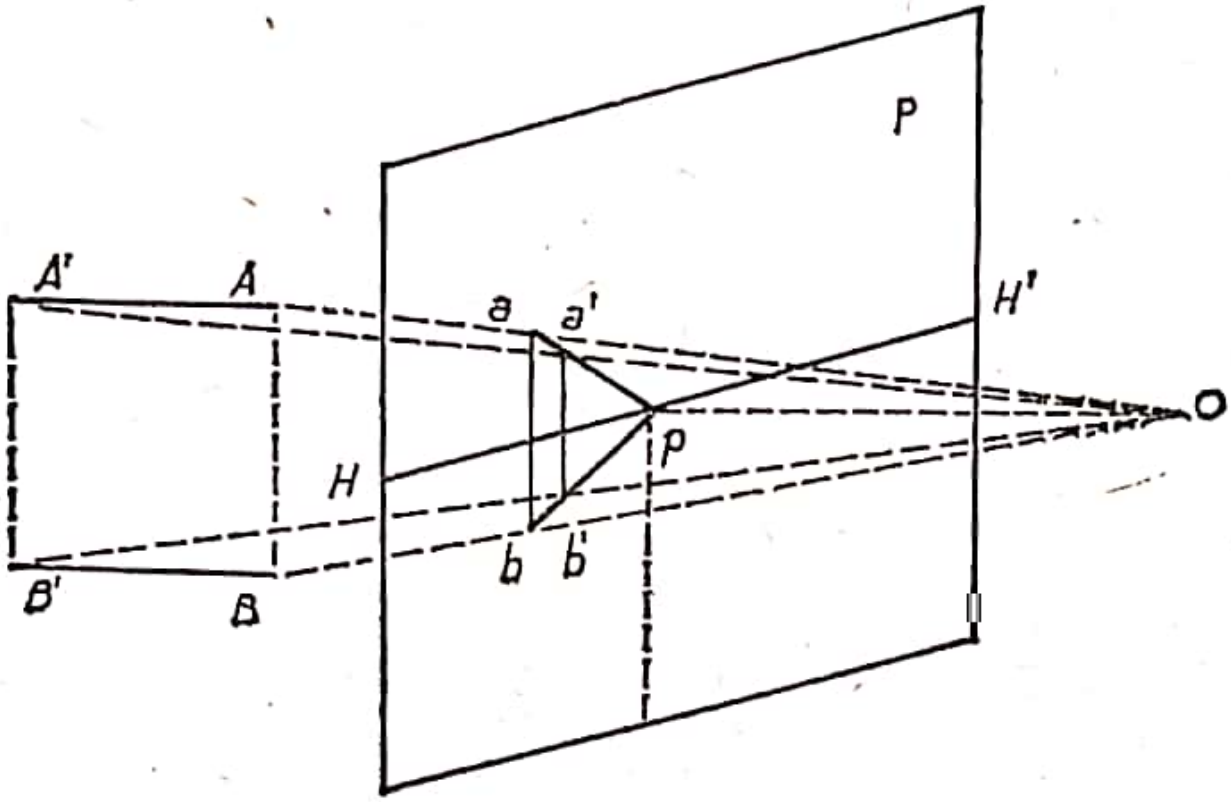


Fig. 31

se presupune *transparent*, pentru ca razele vizuale duse din ochi la obiect să-l poată străbate. Pentru mai multă claritate, fie P, planul tabloului (fig. 30), O, punctul de vedere și AB obiectul redus la un segment de dreaptă. *Razele vizuale* sau *perspective* OA și OB înțeapă planul P respectiv în a și b. Dreapta ab din planul P este perspectiva dreptei AB din spațiu, iar punctele a și b sînt *urmele razelor* OA și OB *pe planul* P. Distanța de la ochi la tablou se măsoară prin lungimea perpendicularei Op, dusă din O pe planul P. Proiecția ortogonală p a punctului O pe planul tabloului se numește *punctul principal* sau *punctul ochiului*. Intersecția planului P cu planul orizontal care trece prin O este *linia orizontului* HH' (fig. 31).

— Dacă am priceput bine, înseamnă că punctul p al ochiului se află pe linia orizontului, așa-i?

— Da. Și iată o proprietate interesantă a liniei orizontului. Fie A și A' două puncte așezate la aceeași înălțime deasupra orizontului și B, B' alte două puncte așezate la fel, dedesubtul orizontului, literele accentuate indicînd punc-

tele mai îndepărtate de planul P (fig. 31). Se observă că perspectivele a' și b' ale punctelor A' și B' sînt mai apropiate de linia orizontului decît perspectivele a și b ale punctelor A și B.

— Adică, cu cît punctele A' și B' se îndepărtează mai mult de tablou, cu atît perspectivele lor se apropie de linia orizontului? Dacă-i așa, atunci ele se găsesc pe această linie numai cînd punctele A' și B' dispar la infinit?

— Exact! Iar această proprietate te face să înțelegi și cauza întîlnirii aparente la orizont a cerului cu marea sau cu cîmpia! Fie acum D o dreaptă oarecare din spațiu (fig. 32). Ea poate întîlni planul P sau să fie paralelă cu el, cazul de a fi cuprinsă în planul tabloului fiind exclus. În figură, urma dreptei D este d. Paralelismul dintre dreapta D și planul P face ca urma dreptei D pe planul P să se îndepărteze la infinit.

— Stai! Vrei să spui că dreapta D întîlnește planul P în d sau nu-l întîlnește. Da?

— Da. Și mai mult. Dreapta D și punctul O formează *planul perspectiv al dreptei* D și din intersecția lui cu planul P *rezultă perspectiva dreptei* D. În mod practic, planul perspectiv se determină ducînd din O dreapta OF, paralelă la dreapta D. Dreptele D și OF înțeapă planul P, respectiv în d și f, iar punctul f se cheamă *punct de fugă* al dreptei D. Rezultă că *perspectiva unei drepte oarecare din spațiu se obține unind urma dreptei cu punctul ei de fugă*, și invers: *urma și punctul de fugă ale unei drepte determină perspectiva dreptei din spațiu*.

— De ce f poartă numele de punct de fugă al dreptei D?

— Fiindcă, dacă se consideră un punct oarecare M de pe dreapta D (fig. 32), atunci perspectiva lui, m, poate fi privită ca intersecția razei vizuale OM cu perspectiva df a dreptei D. Cu cît punctul M *fuge* mai departe de planul P (Mi), cu atît perspectiva lui m (mi) se apropie de punctul f și atunci cînd M dispare la infinit, m se confundă cu f. Punctul f reprezintă deci perspectiva punctului de la infinit de pe dreapta D și de aceea este numit *punctul de fugă* al dreptei D. Din construcția lui rezultă că punctul de fugă al unei drepte are următoarea proprietate: Toate dreptele paralele între ele au

același punct de fugă, cu alte cuvinte imaginile perspective ale dreptelor paralele între ele se întîlnesc în planul tabloului în punctul de fugă. Într-adevăr, punctele de fugă ale fiecăreia dintre dreptele paralele ale unui fascicul se găsesc la intersecția planului P cu dreapta dusă din O, paralelă la razele acestui fascicul. Această proprietate este cunoscută ca *teorema punctului de fugă*. Fasciculul de drepte paralele poate avea diferite poziții față de planul tabloului. Să analizăm cîteva dintre ele și să stabilim consecințele care rezultă cu privire la punctul de fugă:

1. Dacă fasciculul este format din drepte perpendiculare pe planul tabloului, drepte numite de adîncime, atunci paralela din O la aceste drepte este chiar Op, deci: *în perspectivă toate dreptele de adîncime se întîlnesc în punctul ochiului.*

2. Dacă fasciculul este format din drepte paralele orizontale și paralele cu planul tabloului, toate dreptele paralele cu planul tabloului au urmele și punctul lor de fugă la infinit, deci: *în perspectivă toate dreptele orizontale și paralele cu planul tabloului sînt paralele cu linia orizontului.*

3. Dacă dreptele *sînt orizontale* fără a fi și paralele cu planul tabloului, atunci *imaginile perspective ale acestui fascicul se întîlnesc într-un punct de pe linia orizontului.*

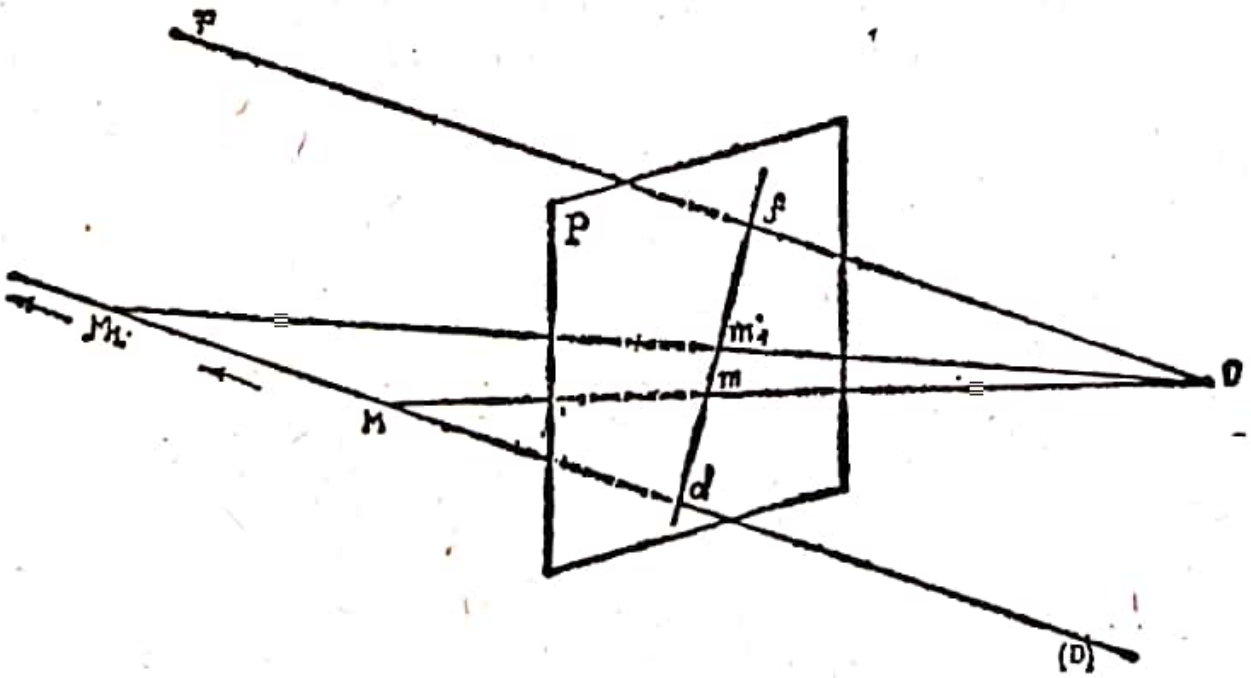


Fig. 32

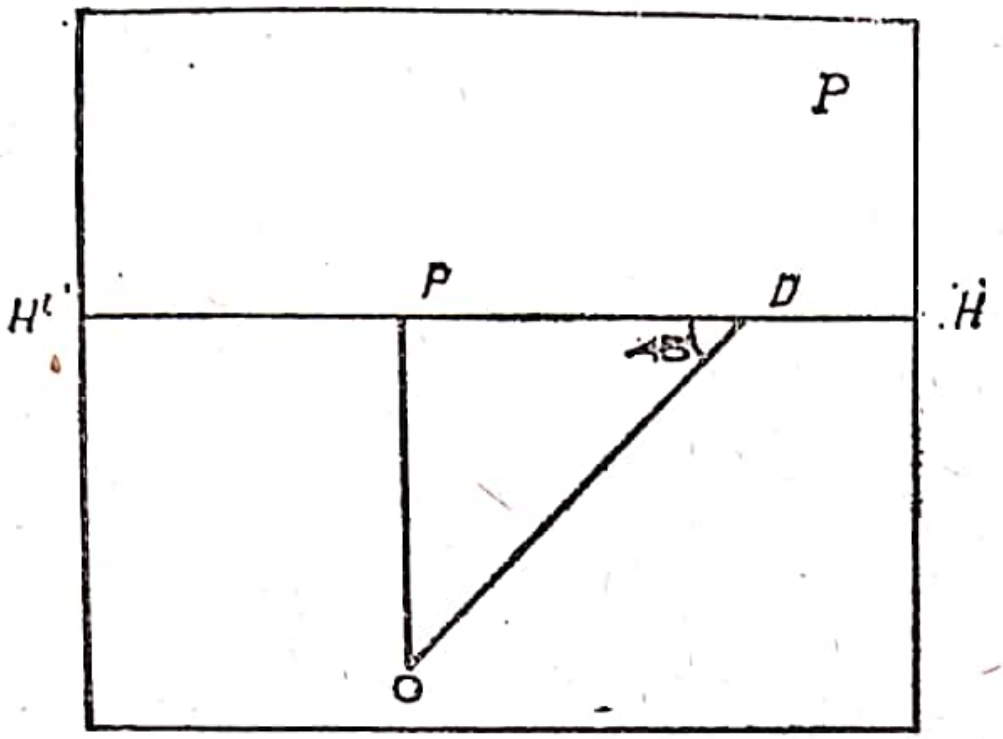


Fig. 33

— Acum aș vrea să mai stabilesc și cu cîteva cazuri: *Un fascicul de drepte verticale și paralele cu planul tabloului are ca imagine perspectivă tot un fascicul de drepte verticale și paralele*, iar dacă dreptele verticale sînt înclinate față de tablou, atunci imaginile lor perspective se întîlnesc în puncte așezate pe verticala dusă prin p în planul P.

— Ei, acum te-ai lămurit cum îi cu punctul de fugă? m-au întrebat amîndoi deodată.

— Oarecum da. Însă aceste date nu-mi sînt de ajuns. Nu cred că aș putea reuși să fac un desen în perspectivă! Mai întîi nu știu cum se măsoară în desen distanța de la ochiul meu pînă la tablou?

— Ai dreptate. Desenul depinde de stabilirea poziției observatorului. Aceasta se poate găsi aplicînd o proprietate a triunghiului isoscel. Uite, să ne închipuim că planul P este chiar această foaie de hîrtie și să desenăm aici dreapta HH' (fig. 33), pe care să o presupunem că reprezintă linia orizontului. Fie O punctul de vedere, iar p punct principal, adică al ochiului. Să considerăm acum un fascicul de drepte orizontale, înclinate cu 45° față de planul P al tabloului. Spune-mi cum se construiește punctul de fugă?

— Ca și pînă acum. Duc din O paralela la aceste orizontale, adică dreapta OD înclinată cu 45° față de HH'.

— Exact. Acum observă ce fel de triunghi este triunghiul OPD.

— Nici o filozofie! Un triunghi dreptunghic și isoscel.

— Trage concluzia!

— Simplu de tot: $Op = pD$.

— Atît tot nu-i de ajuns. Vezi că ai nevoie și de filozofie ca să poți interpreta și folosi rezultatul acesta așa de admirabil prin simplitatea lui?

— Să încerc. Op reprezintă distanța observatorului față de tablou și... acum văd! Fiind egală cu pD, rezultă că dreptele orizontale înclinate cu 45° sau cu 135° față de planul P au punctele lor de fugă situate la o distanță egală, față de punctul principal, cu distanța punctului de vedere față de tablou.

— Prin urmare această problemă s-a rezolvat. Distanța de planul tabloului ne-o dă segmentul pD. De aceea punctul D (sau simetricul lui față de p) se numește *punct de distanță*. Cred că ai destule noțiuni ca să-ți faci o idee sumară despre desenul în perspectivă, a tras concluzia prietenul Miti. Însă ca să execute un desen în perspectivă, artistul folosește datele geometrice de care ți-am amintit aici precum și altele mai particulare, așa *cum crede* el că-i este necesar ca să realizeze cît mai plastic o anumită idee sau un anumit efect estetic; în această alegere intervine numai inspirația lui. Ca să-ți dai seama de aceasta, să-l rugăm pe domnul Miti să ne facă o demonstrație practică.

— Cu plăcere. Cel mai simplu ar fi să vedem cum apare în desenul perspectiv aceeași cameră, să zicem avînd o fereastră pe peretele din stînga și pe jos un covor cu dungi în adîncime, cînd se schimbă poziția observatorului. În acest caz, atît punctul ochiului p, cît și linia orizontului variază ca poziție și înălțime. Să le considerăm în patru poziții diferite. În primele două desene (fig. 34 și 35), punctul ochiului să aibă o poziție simetrică față de pereții camerei, în celelalte două (fig. 36 și 37) asimetrică. În toate cele patru desene să alegem punctul de distanță D la $\frac{2}{3}$ din lățimea camerei. Același interior să-l mai figurăm văzut de la o distanță egală cu de două ori lățimea camerei (fig. 38), p fiind din nou așezat

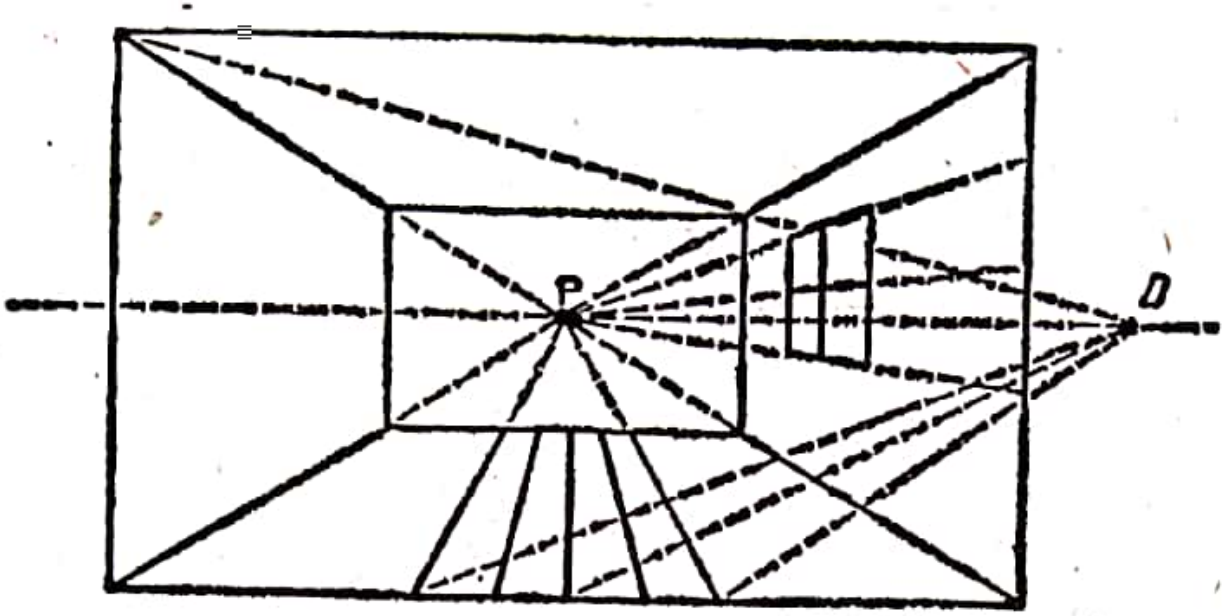
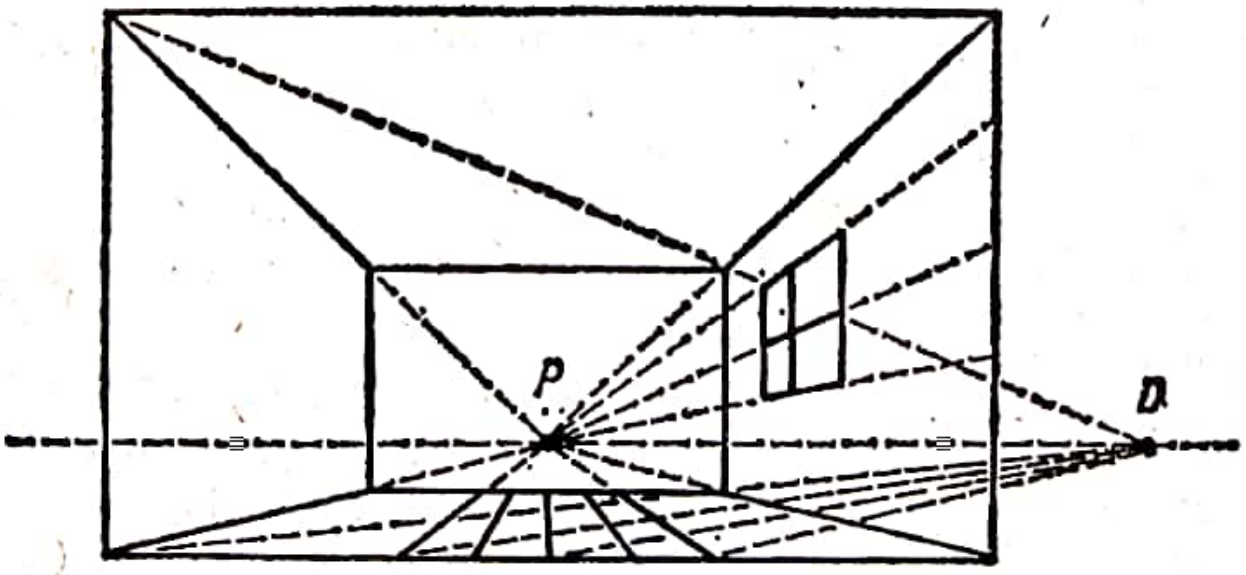


Fig. 34

Fig. 35



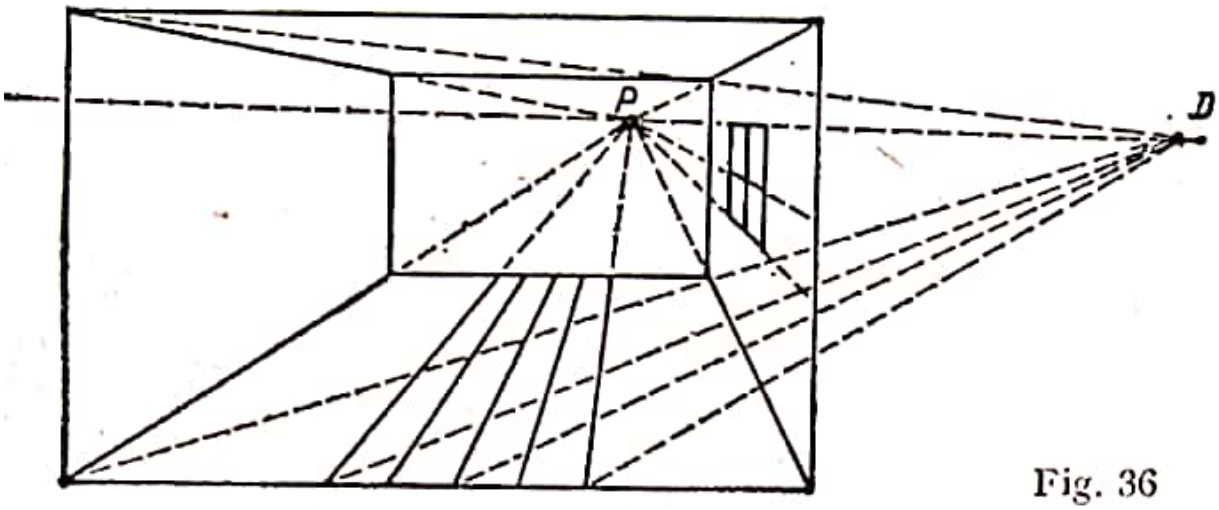


Fig. 36

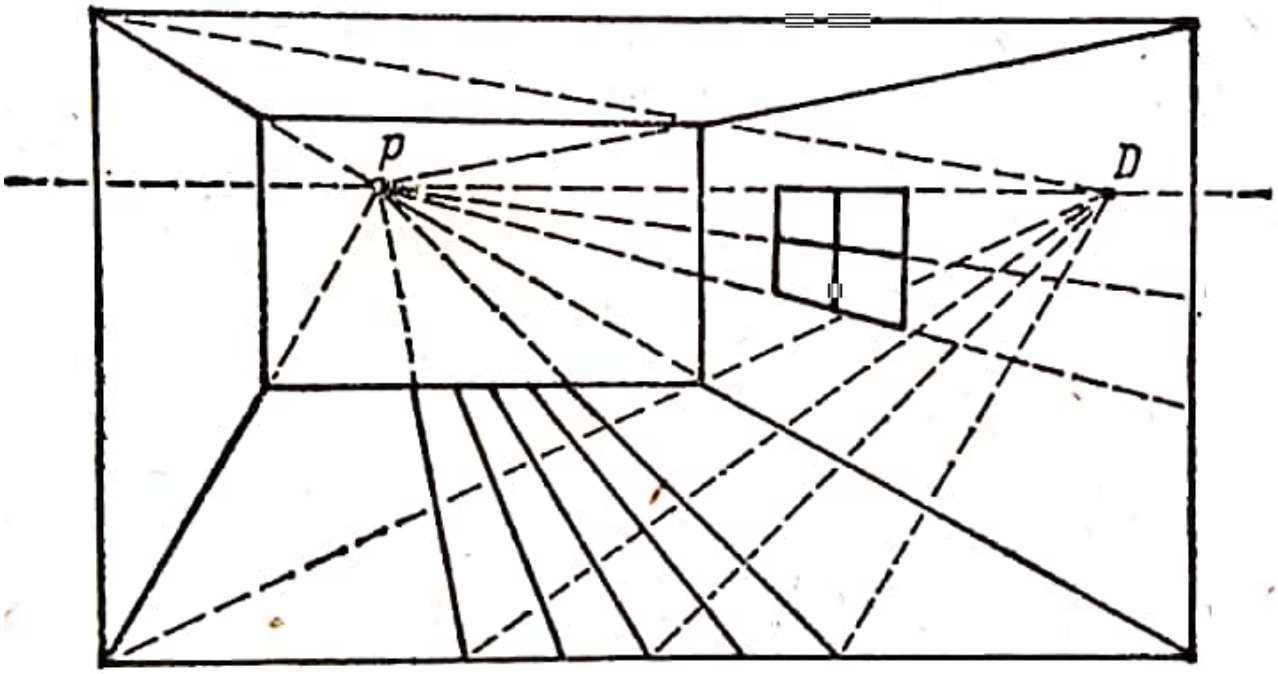


Fig. 37

simetric față de pereții laterali. După cum observați, dacă punctul ochiului este așezat la mijlocul liniei orizontului, desenul trezește, prin simetria pe care o prezintă, un sentiment de armonie. Se poate remarca de asemenea cît de mult depinde desenul de înălțimea observatorului: dacă punctul ochiului este prea sus (fig. 36 și 37), se obține atunci o lățire excesivă a părții de jos a camerei, din care cauză dispar caracterele părții opuse, este ceea ce numim noi *perspectiva*

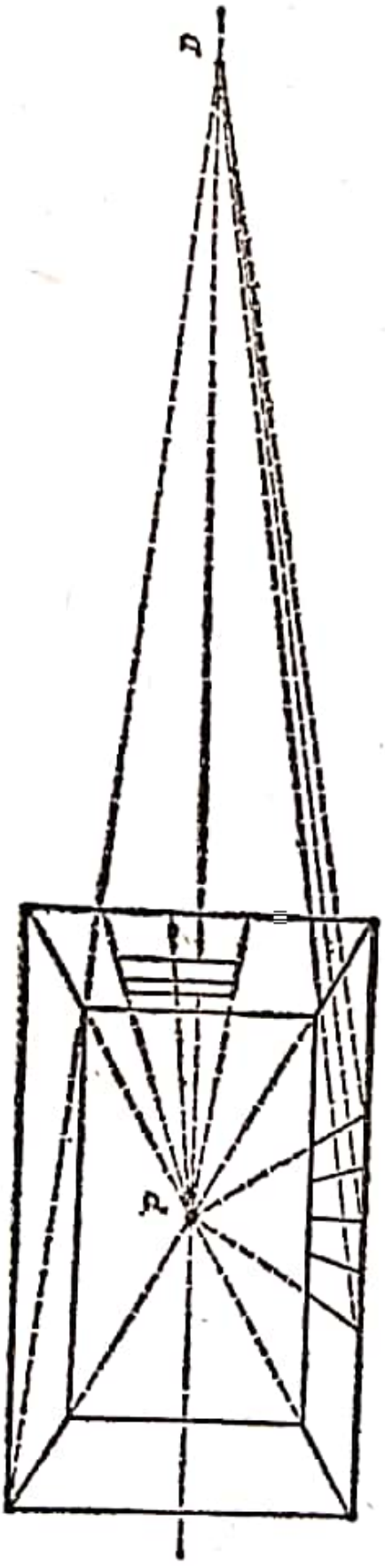


Fig. 38

păsărilor. Din contra, dacă punctul de vedere este așezat prea jos (fig. 35) — *perspectiva broaștei* — atunci partea de sus e redată cu mai multe detalii decît cea de jos. Aceste fapte mi le arată perspectiva, dar alegerea depinde de mine. Fără să mai insist, se vede care este și influența distanței din compararea desenelor de pînă acum cu ultimul desen (fig. 38), în care distanța observatorului față de tablou este de două ori mai mare decît lățimea interiorului. E clar că aspectul camerei e altul decît în primele patru desene, aici observatorul poate să cuprindă cu vederea tot spațiul, fără a întoarce capul dintr-o parte în alta. Nu știu cît au putut să vă ajute aceste schițe, dar mai mult ar însemna să intru în amănunte care ar transforma amuzanta noastră convorbire într-o lecție de specialitate! Pe tine, dragă prietene, dacă problema perspectivei te va mai pasiona și la toamnă, atunci cînd ne vom întîlni la Iași, am să-ți împrumut tratatul lui Horia Teodoru, *Perspectiva*, apărut la București în 1958, care-ți va da toate lămuririle posibile și, în același timp, te va încînta prin bogăția imaginilor bine alese și frumos executate.

— Are dreptate domnul Miti, cartea despre care ți-a vorbit acum, mi-a plăcut și mie deosebit de mult și sînt sigur că nu vei lăsa-o din mînă multe zile în șir. Acum, ca să rămînem în atmosferă, socotesc că s-ar cuveni să ne pierdem cîteva minute amintind și eu despre problema *iluziilor optice*, problemă care a preocupat așa de mult pe pictorii din veacurile trecute și care formează încă și azi un prilej de distracție.

— Ideea nu-i rea, a spus Miti. Am citit undeva că H. Helmholtz, fiziolog și fizician din veacul al XIX-lea, ar fi spus: „Dacă un optician mi-ar fi pus la dispoziție un aparat așa de mediocru cum e ochiul, m-aș fi simțit îndreptățit să-l resping, folosind argumente destul de severe; fără a contesta posibilitățile acestui unic organ, el are toate defectele care se pot găsi la un instrument de optică și pe deasupra altele care îi sînt proprii".

— Nu știu ce a spus Helmholtz, dar știu ce-a spus Eminescu: „Urechea te minte și ochiul te-nșeală", i-am replicat eu.

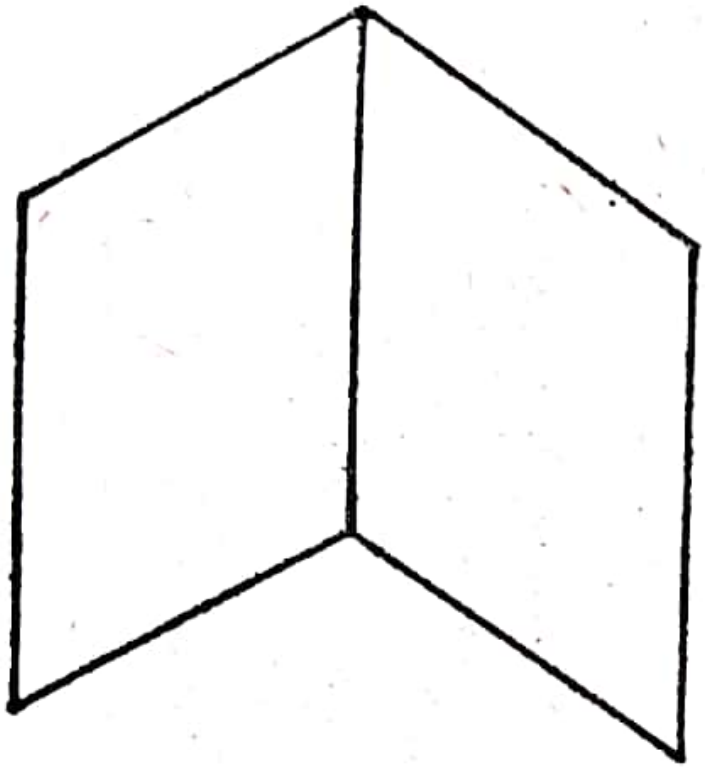


Fig. 39

— Ei bine, ca să ilustrăm această afirmație, a început Teodor Solonar, să amintim cîteva din cele mai cunoscute iluzii optice, numite și *percepții reversibile*. Mai întîi *cartea lui Mach*. Să o desenăm schematic prin două paralelograme lipite printr-o latură (fig. 39). Privind-o, ea ne apare ca o carte deschisă înspre noi, adică în așa fel că i se văd paginile din interior, sau deschisă în partea opusă și i se văd tartajele și cotorul?

— Eu o văd deschisă înspre mine.

— Eu din contra. Realitatea este că ea apare în amîndouă felurile succesiv, și anume i se vede interiorul, dacă se fixează la început o linie din exterior și apoi se plimbă ochiul din exterior spre interior, sau i se văd tartajele, dacă se privește mai întîi linia mediană și se deplasează ochiul din interior spre exterior. Cînd eram elev, de multe ori mă amuza să fac un cub și să-l privesc mai îndelung, căci nu-mi puteam explica o anomalie de același gen.

— A, desigur, e vorba de *cubul lui Necker* (fig. 40). De obicei ni se pare că înaintea noastră este fața verticală $ABCD$ și fața orizontală $DCGH$, dar dacă schimbăm privirea și fixăm cîtăva vreme linia FB, atunci perspectiva se schimbă

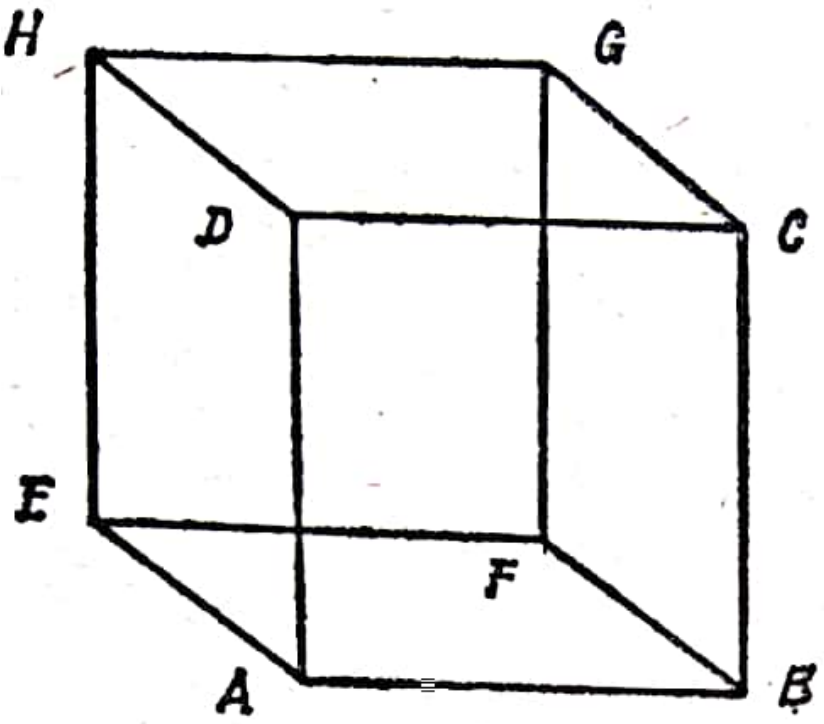


Fig. 40

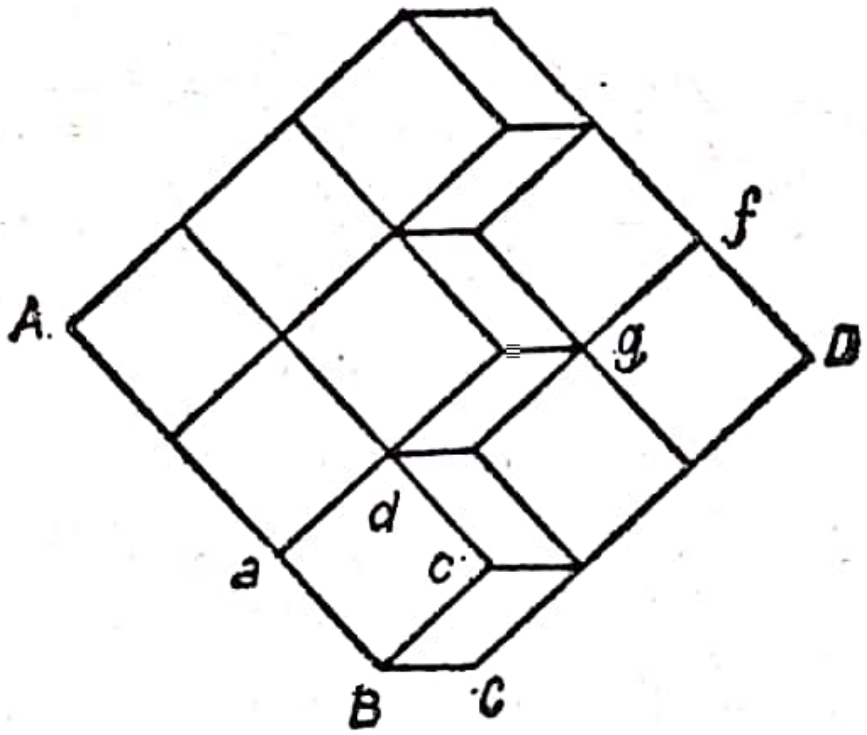


Fig. 41

și în față ne apar planul vertical *EFGH* și planul orizontal *ABFE*.

— Acum e rîndul meu să vă arăt altă jucărie, a intervenit Miti. Priviți cu atenție desenul pe care îl fac (fig. 41) și vă rog să-mi spuneți cîte cuburi vedeți? Pe dl. Solonar îl rog

să se aşeze în aşa fel, ca linia AB să fie linia orizontală a desenului, iar tu consideră linia CD ca linia orizontală.

— Eu ar trebui să ies din joc, căci ştiu răspunsul, a spus Teodor, sînt şase cuburi.

— Cum 6, am replicat eu, văd că-s numai trei!

— Într-adevăr, a rîs Miti, sînt 6 cuburi dacă privim figura aşezînd-o aşa ca linia AB să formeze baza orizontală sau trei cuburi dacă o rotim pînă ce linia CD devine bază orizontală. Desenele noastre au pus ochiul în imposibilitate de a reda o iluzie spaţială precisă a desenului corespunzător, cu alte cuvinte în imposibilitate de a face restabilirea mintală a realităţii. Aceasta ne arată că, în fenomenul de restabilire mintală a realităţii spaţiale, imaginaţia şi puterea de obişnuiţă joacă un rol important. Adică, atunci cînd privim desenul unui obiect, acest desen este comparat cu imaginea pe care o avem în minte despre acel obiect şi, dacă această imagine este destul de vie în minte, atunci chiar un desen incorect din punct de vedere perspectiv conduce uşor la restabilirea lui mintală.

— Vrei să spui, am întrebat eu, că imposibilitatea de a decide cîte cuburi sînt în desenul tău ar fi o consecinţă a faptului că ochiul interpretează cu mai multă uşurinţă cubul ca avînd înainte faţa $aBcd$ cînd se pune baza AB sau $cDfg$ înainte dacă figura are ca bază CD?

— Desigur, e puterea obişnuinţei, mi-a răspuns Miti.

— Tot din cauza *puterii de obişnuinţă*, a spus Teodor Solonar, ochiul e dispus să spaţializeze şi figurile plane. De pildă, am să desenez acum o elipsă $ABCD$ şi tangentele duse din E, care o întîlnesc în punctele A şi C (fig. 42). Dacă aţi fi privit figura, fără nici o explicaţie din partea mea, ce aţi fi văzut?

— Bineînţeles că un con şi fiindcă nu ai punctat jumătate din bază nu se poate aprecia care dintre cele două arce ABC sau ADC este mai aproape de ochi.

— Ba vă rog să priviţi mai îndelung figura aşa cum am desenat-o şi veţi constata că se repetă fenomenul de la cubul lui Necker. Anume, dacă se consideră arcul ABC în faţă şi îl priviţi cîteva minute ca atare, aspectul se schimbă automat şi arcul ADC se aşază înaintea lui ABC!

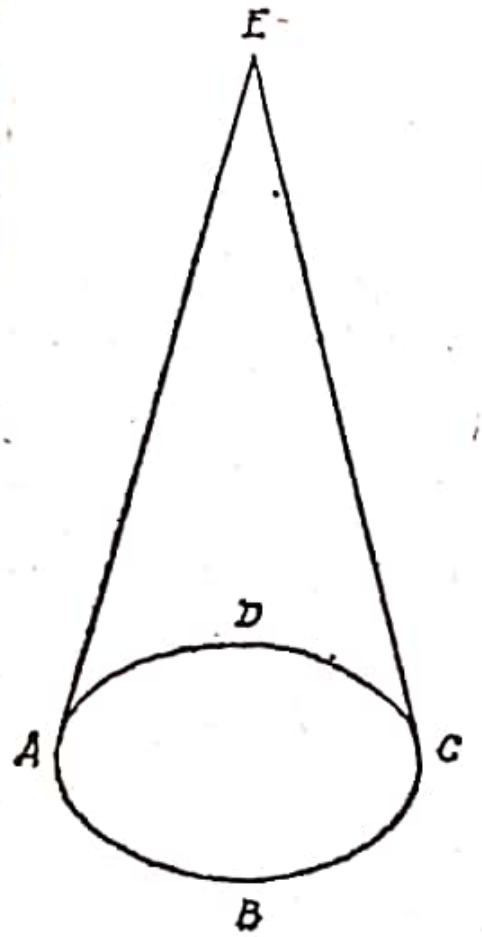


Fig. 42

— Aceste fenomene au fost bine cunoscute de pictorii veacului al XVII-lea și le-au folosit ca să construiască anumite combinații perspective deformante, alcătuind așa-numitele *perspective curioase*, ne-a spus Miti. Există tablouri care, privite din diferite puncte, își schimbă cu totul aspectul. Sînt pictori care au obținut efecte curioase, adăugînd la aceste deformări de perspectivă altele, legate de fenomenele optice. Astfel, în lucrarea lui P. Nicéron, tipărită la Paris prin veacul al XVII-lea, se poate vedea un tablou care reprezintă portretul unui cunoscut personaj de atunci. Dar dacă acest portret este privit printr-o sticlă poliedrală, dintr-un anumit punct, atunci apare portretul lui Ludovic al XIII-lea.

— Dacă-i vorba de curiozități provocate de perspectivă, atunci și perspective foarte exacte pot dezamăgi ochiul, contrazicînd imaginea noastră despre obiectele din natură. Cel mai plastic exemplu ni-l oferă fotografia unei persoane cu o mînă întinsă înainte. Nici nu se poate imagine mai grotescă

decît ca mîna să se contureze cu mult mai mare decît restul corpului, deși regulile perspectivei sînt perfect respectate.

— Imaginea aceasta o avem de multe ori în fața ochilor noștri la televizor, cînd cel televizat nu-i atent la mișcările pe care le face cu mîna!

— Dar sînt în pictură și cazuri cînd artistul care ar vrea să facă un desen în perspectivă să nu-i poată respecta regulile. De pildă o masă privită dintr-un anumit punct l-ar conduce la desenarea unghiurilor prea ascuțite sau prea obtuze ceea ce nu se împacă cu imaginea omului despre masă. Tot așa, dacă se consideră un șir de coloane așezate paralel cu planul tabloului, perspectiva ar cere ca grosimea coloanelor să crească cu depărtarea lor de centrul tabloului, pe cînd imaginea noastră despre coloane impune ca toate coloanele să aibă aceeași grosime!

Cînd ne-am uitat la ceas trecuse de mult de miezul nopții. Miti s-a sculat grăbit, să nu piardă trenul. Era o noapte senină și răcoroasă, numai bună pentru o plimbare ca să ne mai dezmorțim oasele. Aducîndu-i acest argument, Miti a admis să-l conducem la gară. Cînd era să plecăm, Teodor Solonar îi spune:

— Uite că ți-ai uitat cartea.

— Care carte? s-a mirat Miti.

— Cum care? *Tratatul de pictură* al lui Leonardo da Vinci!

— Domnule Solonar, a protestat Miti, uimit.

— Nici un domnule! Nu știi că gura păcătosului adevăr grăiește? Du-o cu d-ta, ca pe o amintire a acestei întîlniri.

TĂIETURA DE AUR

SAU PROBLEMA UNEI UNITĂȚI DE MĂSURĂ PENTRU FRUMOS

— Acum că ai venit la Iași, i-am spus prietenului meu Teodor Solonar pe cînd sorbeam cafelele, să știi că nu te las să te-ntorci acasă pînă n-ai să-mi lămurești problemele care s-au adunat doldora de cînd nu ne-am mai văzut. Și-s atîtea, că-ți spun drept nici nu știu cu ce să-ncep!

— Să începi? m-a întrebat el rîzînd. Mi se pare că ai început încă de cînd îmi desfăceam bagajul! Te sîcîie, văd, noțiunea de *modulor*, preconizată de celebrul arhitect Le Corbusier.

— Dar asta-i cu totul altceva, am precizat eu. Ți-am vorbit despre ea numai așa ca o informație... N-am pretenție să-mi lămurești tu această noțiune, ea fiind din domeniul arhitecturii...

— Ești chiar sigur că modulorul lui Le Corbusier e străin de matematici? mi-a replicat Teodor Solonar strivindu-și țigara.

— Bănuiesc. După cîte am înțeles eu, ar fi un termen tehnic care exprimă gradul de emoție artistică trezit de anumite forme arhitectonice frumoase și frumos orînduite în spațiu! De altfel chiar Le Corbusier afirmă că „arhitectura este o artă, un fenomen emoțional, *în afara problemelor de construcție și dincolo de ele*". Construcția este pentru a ține, spune el, însă arhitectura este pentru a emoționa!

— Cu alte cuvinte, ești convins că matematica n-are ce-și băga nasul în modulor? m-a întrebat Teodor Solonar.

— Cam așa.

— Cred că te-nșeli! mi-a spus domol prietenul meu. Întrebîndu-mă despre modulor, ai atacat una dintre cele mai fermecătoare probleme de geometrie. Și n-aș vrea să te las să treci pe lîngă ea fără s-o admiri!

— Am înțeles, i-am tăiat-o prompt! Ai venit cu problema asta gata pregătită de acasă și eu am căzut din întîmplare ca

musca în păienjeniș! Dar dacă te-a interesat și pe tine modulorul lui Le Corbusier, n-avem decît să vorbim și despre el! Numai că nu te mai osteni să vopsești modulorul cu geometrie, fiindcă te cred capabil să-mi expui clar chiar și o problemă care nu-i din domeniul tău!

— Mulțumesc pentru cinste. Nu ne cunoaștem de azi, de ieri ca să mă sinchisesc de laudă sau de învinuire! Dacă nu te-ar fi împiedicat doamna Lene, ai fi căutat într-un dicționar de arhitectură modernă și ai fi găsit acolo că *modulor* derivă de la *modul* (raport sau scară de proporție) și *or* (aur). Ai fi înțeles că este vorba despre un raport între două mărimi — două segmente dacă vrei — și astfel termenul misterios s-ar fi transformat în *modulul de aur, raportul sau tăietura de aur*, acel raport căruia, pe vremuri, Fra Luca Pacioli di Borga i-a spus *proporție divină* și a folosit numirea ca titlu pentru cartea pe care va tipări-o în 1509 la Veneția la insistența prietenului său Leonardo da Vinci, care a și ilustrat-o! Le Corbusier nu face alta decît să reia în 1950 problema pusă de înaintașul lui cu aproximativ 450 de ani înainte, publicînd, de data aceasta la Paris, o altă carte cu titlu asemănător: *Le modulor. Essai sur une mesure harmonique á l'échelle humaine applicable universselement á l'architecture et á la mécanique.*

Aceste informații, pe care prietenul meu mi le arunca în grabă ca pe niște săgeți, se transformau pe neașteptate în mintea mea într-o punte de legătură cu problemele ce mă preocupau:

— Va să zică modulorul și tăietura de aur sînt neamuri? am întrebat eu spășit. Atunci iartă-mă! Dacă aș fi știut-o, nu te mai contraziceam!

— Cum vine asta? s-a mirat, la rîndul lui, prietenul meu.

— Iacă așa. Nu-i mult de cînd am răsfoit o carte întreagă despre tăietura de aur, publicată tot la Paris de un scriitor de origine română.

— Nu mai spune! N-oi fi găsit tu *Esthétique des proportions* a lui Matila Ghyka, pe care eu o caut de atîta vreme?

— Ba da! Uite-o aici. Am dat peste ea acum vreo două luni la anticariat și, cum nu-mi aminteam s-o fi văzut astăvară cînd am fost la tine, am luat-o. Ba chiar începusem s-o

citesc, pînă ce am dat peste niște formule. Acolo m-am împotmolit.

— De ce, erau greu de urmărit?

— Habar n-am! N-am avut curajul să le atac așa de unul singur și am pus cartea deoparte, așteptîndu-te pe tine! Poftim, răsfoiește-o și vei găsi în ea o sumedenie de lucruri care așteaptă să-mi fie lămurite!

Teodor Solonar a izbucnit într-un rîs care m-a molipsit și pe mine. Luîndu-mi cartea din mînă, m-a întrebat:

— Și cum rămîne treaba cu musca și cu păienjenișul? Dacă-i așa, a continuat el, am să-ți spun că nu de mult am dat și eu peste un exemplar publicat de Le Corbusier în 1960, intitulat *Precisions. Sur un état présent de l'architecture et de l'urbanisme*, în care autorul ține să precizeze ce rol important joacă geometria în arhitectură. Pentru ochi totul e geometrie, scrie el acolo. „Compoziția arhitectonică este geometrică, eveniment de ordin vizual în primul rînd, eveniment antrenînd judecăți de cantitate, de raporturi, aprecieri de proporții. Proporțiile provoacă senzații, iar perindarea acestor senzații corespunde melodiei din muzică". Așa că, cu toată părerea de rău, dar trebuie să te dezic și cu privire la părerea pe care ai vrut să mi-o impui cu citatul tău! În ultimele sale lucrări, Le Corbusier găsește că există o legătură indisolubilă între geometrie și arhitectură. Desigur că arhitectura este o artă, dar aceasta n-o împiedică să fie rudă bună cu geometria!

— Mă dau bătut! Rămîne să-mi spui limpede, ce-i tăietura de aur? Am citit într-o carte că dacă se taie un segment de dreaptă, să-i zicem AB, în două părți egale, AT și TB, atunci acestea sînt în tăietura de aur dacă se poate scrie proporția

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB}. \qquad (1)$$

Or, după cîte-mi aduc aminte, aceasta este împărțirea unui segment în medie și extremă rație.

— Așa și este; cînd împărțirea unui segment se face în raport extrem și mediu, atunci se spune că părțile lui sînt în *tăietură de aur*.

— De ce spui așa? La școală am învățat „medie și extremă rație", iar tu schimbi și zici „raport extrem și mediu".

— Nu-i nici o deosebire. Așa cum zici tu înseamnă traducerea exactă a termenului franțuzesc „en moyenne et extrême raison". Însă prof. Victor Marian, pe care-l admir în mod deosebit pentru bogata lui contribuție în domeniul istoriei matematicilor românești, folosește, în traducerea făcută de el în românește a *Elementelor lui Euclid*, expresia „raport extrem și mediu". Spun și eu așa în semn de omagiu. N-am înțeles însă ce te nemulțumește. Faptul că tăietura de aur este împărțirea unui segment în raport extrem și mediu?

— Da. Ai putea recunoaște și tu că o asemenea problemă de geometrie, pe care am învățat-o destul de bine la școală ca să mi-o fi amintit de îndată ce am recitit-o în cartea lui Ghyka, nu mă putea emoționa într-atît încît să las din mînă alte cărți mai atrăgătoare ca s-o citesc pe ea! Gîndește-te și tu ce mare problemă: un raport! rapoarte și proporții! Nu găsesc cu cale să faci atîta caz pentru un lucru știut și răsștiut! Drept să-ți spun, mi-a fost și ciudă cînd am văzut ce urma după o introducere așa de frumoasă!

— Și eu îți spun drept: mă uimește destăinuirea ta! Dacă tu ești în stare să arunci o carte așa de interesantă, de frumos și de competent scrisă ca aceasta a lui Matila Ghyka numai fiindcă ai văzut strecurate printre rînduri niște rapoarte și proporții, cum vor proceda alții care nu au pregătirea ta? Să fie oare așa de mare prăpastia care desparte pe cei ce îndrăgesc cu adevărat matematicile de ceilalți? Doar nu-i vorba aici de o carte de specialitate! Rapoarte! proporții! Pot ele să te-nspăimînte? Sînt ele oare altceva decît formele cele mai simplificate ale comparațiilor și analogiilor pe care le întîlnești în orice domeniu și mai ales în poezie? Oare nu compară pe A cu B poetul care folosește o metaforă? Ascultă cît de frumos poate să apară raportul $\frac{a}{b}$ îmbrăcat în haina versului eminescian:

„Tîmpla bate liniștită ca o umbră viorie"
sau
„Tu nici nu știi a ta apropiere
Cum inima-mi de-adînc o liniștește
Ca răsărirea stelei în tăcere".

Ascultă și o proporție făurită de același poet, scump nouă:

„Precum Atlas în vechime sprijinea cerul pe umăr,
Așa el sprijină lumea și vecia într-un număr".

— E absurd ce zici! În poezie, frumusețea constă tocmai în *imaginea* aleasă...

— Iar în matematici în *generalitate*, căci raportul $\frac{a}{b}$ cuprinde în el cele mai reușite metafore, spuse sau nespuse încă. Raportul meu le cuprinde pe toate în cea mai sublimă formă, aceea a abstractului. El este esența însăși a poeziei, poezia distilată, rămînînd-a-ți ție să-l lași să vorbească în care formă vrei.

— O fi și cum spui tu, numai că, dacă e foarte simplu să scrii și să înveți proprietățile rapoartelor și ale proporțiilor, nu e tot așa de simplu să găsești o metaforă potrivită! Aristotel spunea că acesta e singurul lucru care *nu se poate învăța de la alții* și că o metaforă bună este un semn de geniu și de originalitate, căci implică percepția intuitivă a asemănării în lucruri cu totul deosebite.

— Sînt de acord cu Aristotel, însă constat că nu mi-ai spus nimic nou. Așa se deosebește un poet de un om de rînd!

— Știu că te-ar flata dacă aș adăuga: și un matematician de un nematematician! Dar nu adaug nimic.

— Nici nu-i nevoie. Lasă-mă să continui. Oare faptul că Leonardo da Vinci sau Le Corbusier au folosit *raportul extrem și mediu* n-a fost pentru tine o suficientă chezășie a calităților lui excepționale? Și grecii au cunoscut îndeaproape impresia de armonie și de echilibru care se degajează din segmentele neegale ale căror lungimi se află în raportul extrem și mediu, căci în sculptura și în arhitectura greacă din secolul lui Pericle și de mai tîrziu *canonul tăieturii de aur* era respectat cu strictețe. Și tot la acest raport se referă filozofii greci cînd afirmă că frumusețea înseamnă proporție bine cumpănită.

— Ei au dat acestui raport numele de tăietură de aur?

— Nu. Această numire are o origine mai nouă. Se pare că expresia *sectio aurea* se datorește lui Leonardo da Vinci, dar ea nu a fost folosită nici atunci în mod curent, ci de-abia de la începutul secolului al XIX-lea încoace. Geometrii greci de dinaintea lui Euclid, ca Pitagora, Eudoxus, Platon, i-au spus pur și simplu raport. Euclid e primul care-l numește *raport extrem și mediu*, deosebindu-l astfel de toate celelalte rapoarte în care s-ar putea împărți un segment de dreaptă.

— Era necesară, cred, această precizare, fiindcă în general într-o proporție intervin patru segmente și o proporție geometrică conduce la egalitatea dintre rapoartele segmentelor luate două cîte două.

— Exact. Numai mediile cer trei termeni sau trei segmente, și în acest caz unul dintre cele trei segmente are o *valoare medie*, adică o mărime cuprinsă între celelalte două.

— Fiindcă vorbești de medii, ce-ar fi să-mi spui cîte medii se pot forma cu trei termeni dați, să zicem $a > b > c$.

Sînt vreo 11 medii. Dintre acestea, Pitagora cunoștea trei, acelea care sînt și azi cel mai des folosite: *media aritmetică*: $b = \frac{a+c}{2}$ sau $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$. Apoi media geometrică $b = \sqrt{ac}$, care din cauza formei $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ se mai numește și *proporție continuă*. Ea se mai scrie încă sub forma $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$. În fine, media armonică se definește prin $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$, de unde $b = \frac{2ac}{a+c}$ sau, în forma inițială, $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$. În cazul tăieturii de aur, $a = b + c$, iar segmentele a, b și c sînt în *proporție continuă*. Rezultă de aici că tăietura de aur este mai mult decît o proporție continuă, fiindcă între cele trei segmente ale proporției continue se mai impune o condiție, și anume ca suma

a două dintre segmente să fie egală cu al treilea segment: $a = b + c$. Așadar, avem

$$\frac{b + c}{b} = \frac{b}{c}. \qquad (2)$$

— Probabil că de aceea se vorbește de *raportul* și nu de *proporția* tăieturii de aur! Un raport implică numai două segmente, și în acest caz cele două segmente *(b* și *c)* în care se împarte lungimea întreagă *(a)* sînt așa fel ca să se poată scrie proporția

$$\frac{b + c}{b} = \frac{b}{c}.$$

Misterioase argumente!

— Să știi că este un pic de adevăr în epitetul tău. Se pare că, atunci cînd segmentele b și c sînt în tăietură de aur, ele plac ochiului mai mult decît oricare alte segmente neegale, b', c', în care s-ar fi împărțit *aceeași lungime a*. Această observație empirică l-a condus pe Leonardo da Vinci să numească această împărțire a segmentului de lungime a în segmentele b și c *sectio aurea*, adică „tăietură de aur", ilustrînd epitetul cu exemple luate din proporțiile corpului omenesc și din arhitectură. El afirma că forma armonioasă a corpului omenesc se explică prin existența raportului de aur între diferitele părți ale lui.

— Mi se pare că buricul împarte corpul după secția de aur.

— Da, toate statuile antice sînt construite după această regulă. Mai mult, Leonardo da Vinci e de părere că tăietura de aur este canonul după care ar trebui să se stabilească proporțiile dintre diferitele părți ale aceleiași clădiri, precum și între volumul construit și cel rămas liber, pentru că numai astfel poate să placă ochiului. Luca Pacioli, mai mistic din fire, i-a spus *divina proportione* și a încercat să justifice titulatura printr-o mulțime de analogii și comparații metafizice luate fie din filozofia lui Platon, fie din teologia creștină. Iată un exemplu: „... După cum Dumnezeu nu poate fi dovedit prin cuvinte, tot așa nici acest raport nu poate fi definit printr-un număr rațional, ci rămîne totdeauna ascuns și secret și de aceea este numit de matematicieni irațional.

Această mentalitate va dăinui în tot cursul secolului al XVI-lea. O găsim și la marele astronom Kepler, care scrie: „Această proporție geometrică, cred eu, a fost pentru creator o idee care rămîne singură veșnică, pentru a releva crearea celui asemenea din cel asemenea..."

— Deși eu nu-l cunosc pe Kepler în calitate de matematician sau astronom știu că el a compus un adevărat tratat de estetică. Să fie vreo 20 de ani de cînd am citit o carte scrisă de Warrain în care autorul prezintă și analizează o lucrare mai puțin cunoscută a lui Kepler, de pe la începutul secolului al XVII-lea, intitulată, mi se pare, *Armonia lumii (Harmonices Mundi)*. Prea multe n-am reținut din această carte; pentru tine ar fi fost mai ușor de urmărit, căci se vorbea mult de figuri plane, de poliedre, de rapoarte și proporții. Mi-am amintit de ea acum cînd ai vorbit de Kepler, și aceasta nu mă face să mă mir că el s-a exprimat așa. Multe scrieri de atunci poartă amprenta misticismului.

— Ei bine, cercetătorii din secolul al XIX-lea, curioși să găsească un temei acestor preferințe pentru raportul despre care vorbim, au făcut multe anchete statistice în diferite domenii. Astfel, un cunoscut psiholog de atunci, G. Th. Fechner, a prezentat unui larg public o serie de dreptunghiuri cu dimensiuni diferite și a cerut să se aleagă pe acela cu forma cea mai plăcută (fig. 43).

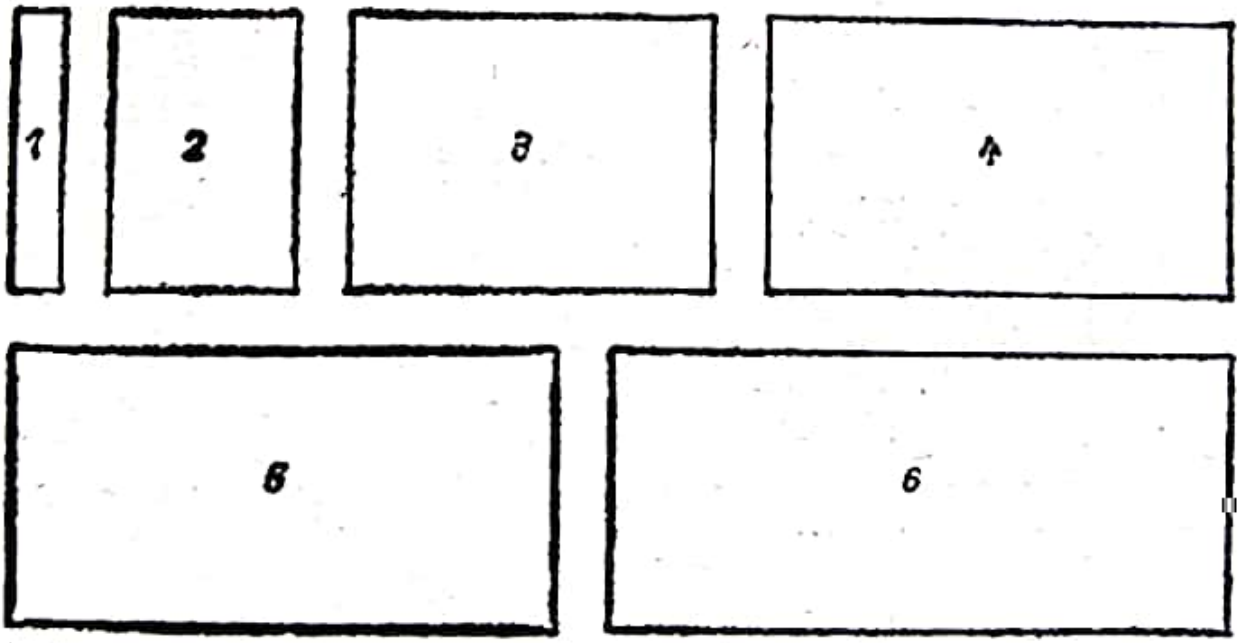


Fig. 43

— Cunosc experiența. Majoritatea preferințelor au fost pentru dreptunghiurile cu dimensiunile în tăietura de aur (fig. 43, nr. 2 și 4). De altfel știu că forma obișnuită a cărților, a meselor sau a multor altor obiecte dreptunghiulare de uz curent, au dimensiunile în acest raport.

— S-au mai făcut și măsurători pentru a se căuta dacă acest raport se întîlnește în natură, între dimensiunile diferitelor părți ale corpului omenesc, ale plantelor sau ale animalelor.

— Am citit și despre aceste măsurători. Rezultatele lor sînt adesea citate în lucrările de estetică. În unele dintre ele se face aluzie la șirul lui Fibonacci, sau la așa-numita *lege a creșterilor organice*. De aceea aș vrea să știu mai întîi cum se stabilește în mod practic valoarea tăieturii de aur și apoi ce legătură poate fi între această tăietură de aur, legea creșterilor organice și șirul lui Fibonacci?

— Ca să te liniștești, află întîi că aceste trei noțiuni sînt, într-un fel, sinonime.

— Cum anume?

— Ai să vezi pe parcurs și ai să înțelegi! Deocamdată am să-ți arăt cum se determină în mod practic tăietura de aur a unui segment dat AB, cu alte cuvinte cum se află poziția punctului T astfel că

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB}. \qquad (1)$$

— Presupun că, fiind vorba de o medie proporțională, se va folosi una dintre teoremele pe care le-am învățat la triunghiul dreptunghi. De pildă că înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este medie proporțională între cele două segmente determinate pe ea.

— Strașnic! Dacă mi-ai fi elev, ți-aș da nota 10! Chiar așa vom proceda. Construcția este însă mult mai simplă dacă se transformă întîi forma proporției (1) aplicînd cunoscuta proprietate a rapoartelor egale între ele: suma numărătorilor pe suma numitorilor..., adică scriind

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB} = \frac{AB + AT}{AT + TB}.$$

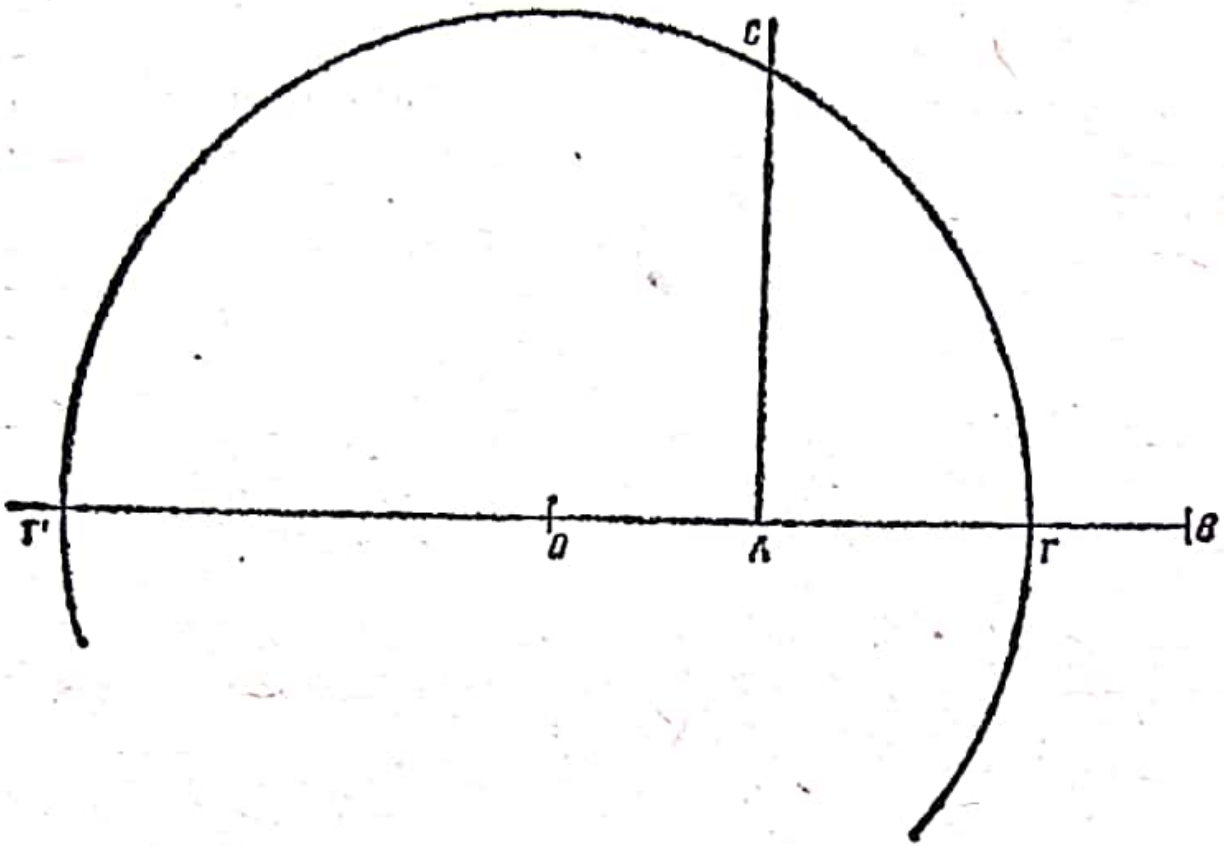


Fig. 44

Dacă în loc de prima proporție o luăm pe cea care urmează, avem

$$\frac{AB + AT}{AB} = \frac{AB}{AT}. \qquad (3)$$

— Văd că astfel s-a obținut o nouă proporție, în care segmentul întreg AB este medie proporțională între partea cea mai mare AT și suma dintre aceasta cu segmentul întreg. Nu cumva s-a stabilit astfel încă o tăietură de aur, dacă, bineînțeles, s-ar pleca de la segmentul $AB + AT$ ca întreg?

— Ba da! și te vei bucura de consecințele acestei concluzii. Consideră segmentul AB de lungime a (fig. 44) și ridică în A o perpendiculară AC tot de lungime a. Acum găsește jumătatea segmentului AB și așază această jumătate spre stînga. Ai segmentul $DA = \frac{a}{2}$. Dacă din D ca centru și cu o rază cît DC descrii un semicerc, el taie segmentul AB în T, iar prelungirea lui în T'. Spune-mi, te rog, care-i pro-

porția determinată de segmentul $AC = a$ în această construcție?

— Fiind vorba de un semicerc, punctul C poate fi considerat ca vîrful unghiului drept înscris în acest semicerc și deci AC este perpendiculara coborîtă din acest vîrf pe ipotenuză. După teorema la care m-am gîndit, rezultă

$$\frac{T'A}{AC} = \frac{AC}{AT}$$

și, fiindcă $AC = AB$, rămîne să văd dacă $T'A$ nu-i cumva egal cu $AB + AT$. Avem $T'A = T'D + DA$. Centrul cercului fiind în D, rezultă

$$T'D = DT = DA + AT, \text{ unde } 2.\ DA = a = AB.$$

Pot scrie deci $T'A = DA + AT + DA = AT + AB$ și găsesc exact proporția (3).

Așadar, să rezum metoda prin care găsesc poziția punctului T. Iau segmentul AB, ridic în A o perpendiculară cît AB și așez la stînga lui A segmentul $AD = \frac{AB}{2}$. Apoi duc cercul cu centrul în D și raza DC. El determină tăietura de aur a segmentului AB, fiindcă am

$$\frac{T'A}{CA} = \frac{CA}{AT} = \frac{AB}{AT} = \frac{AT}{TB}.$$

— Foarte bine, dar cu asta n-ai terminat.

— Nu văd de ce.

— Fiindcă nu te-ai ocupat de loc de punctul T'. După ce a intervenit în problemă și ți-a ajutat s-o rezolvi, nu-i dai nici atîta atenție ca să-l întrebi ce mai face? O fi el numai *un punct*, dar — de! — tot se cuvine să-i arunci o privire de mulțumire! Nu-l vezi cît de modest stă acolo, în afara segmentului AB?

— Tocmai de aceea nu l-am băgat în seamă, dar acum, dacă mă gîndesc mai bine..., bănuiesc că ar putea fi o nouă soluție a problemei. Să existe oare și un al doilea punct, de data asta exterior segmentului AB, care să-l împartă în raport extrem și mediu?

— Încearcă să vezi!

— Avem $T'A = AT + AB$ și $AC = AB$, aşadar pot scrie relația (3) sub forma:

$$\frac{T'A}{AB} = \frac{AB}{AT}.$$

— Înlocuind $AB + AT$ prin $T'A$, n-am realizat decît o simplificare de scris.

— Deocamdată. Dar dacă ai aplica și aici teorema cu suma numărătorilor pe suma numitorilor?

— Atunci am avea

$$\frac{T'A}{AB} = \frac{AB}{AT} = \frac{T'A + AB}{AB + AT}; \qquad (4)$$

dar din figură văd că $T'A + AB = T'B$ și $AB + AT = AT'$, adică avem

$$\frac{T'A}{AB} = \frac{T'B}{T'A}$$

sau

$$\frac{T'B}{T'A} = \frac{T'A}{AB}. \qquad (5)$$

Am găsit că $T'A$ este medie proporțională între AB și $T'B$. Rezultă că punctul T' este punctul exterior segmentului AB, care are aceeași proprietate ca și punctul T interior segmentului AB.

— Desigur și ai fi putut prevedea aceasta mai de mult dacă n-ai fi privit raportul cu atîta indiferență! Închipuiește-ți-l viu, luînd valori în funcție de poziția punctului T care se plimbă pe dreapta, nedefinit de lungă ce conține segmentul AB, venind de undeva de departe, din stînga lui A (fig. 45). Încă n-a ajuns la poarta segmentului AB și, dacă nu ții seama de semne și numești $T_1 \to T_1$ poziția punctului T cît este în afara segmentului AB, atunci valoarea raportului $\frac{T_1B}{T_1A}$ este mereu mai mare ca unitatea și descrește cu cît punctul T_1 se apropie de A. Consideră și raportul $\frac{TA}{AB}$. La un moment

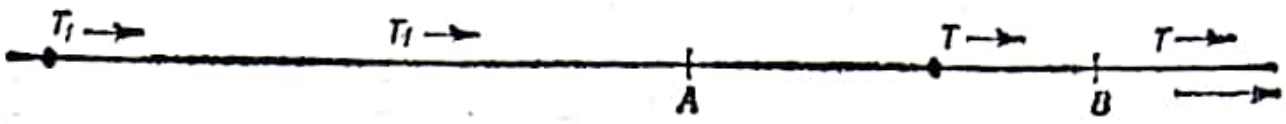


Fig. 45

dat el poate lua — și chiar ia—o valoare egală cu aceea a raportului $\frac{T_1B}{T_1A}$. În acel moment, pentru punctul T, din exterior, este valabilă relația (5).

Acum să presupunem că punctul T pătrunde în interiorul segmentului AB și valoarea supraunitară a raportului $\frac{AB}{AT}$ va fi, pentru o anumită poziție a punctului T, egală cu aceea a raportului $\frac{AT}{TB}$. Acestea sînt singurele poziții ale punctului T în care cele două rapoarte sînt egale. După ce punctul T trece dincolo de B, vezi bine că problema nu se mai pune.

— Mi se pare însă că de data aceasta tu nu mi-ai spus tot despre T_1. Văd că segmentul T_1A nu-i independent de TA, fiindcă $T_1A = AB + AT$. Dar de aici nu se poate trage nici o concluzie?

— Ba da. Una foarte interesantă. Consideră ca segment dat pe T_1B și nu pe AB. În acest caz, relația (5) îți arată că punctul A împarte segmentul T_1B în raport mediu și extrem, R_1A fiind partea cea mai mare. Dar $T_1A = AB + AT$ și AT este partea cea mai mare a segmentului AB împărțit, la rîndul lui, în raport mediu și extrem de punctul T. Rezultă că, dacă se scade segmentul cel mai mic din cel mai mare, segmentele care se obțin rămîn în tăietură de aur:

$$T_1B - T_1A = AB,$$
$$T_1A - AB = AT,...$$
$$AB - AT = TB$$
$$AT - TB = ...$$

iar acest proces poate fi continuat la infinit.

— Stai să privesc pe figură (fig. 45) ca să văd clar cum vine asta. Avem întîi segmentul T_1B și punctul A e punctul în-

terior care-l împarte în tăietura de aur, T_1A fiind mai mare ca AB. Bine! Acum, dacă scad din T_1A pe AB, obțin AT, unde $AB > AT$. De fapt, făcînd scăderea acestor două segmente, obțin un punct la stînga lui A, dar, după cum am văzut din figura 44, pot transfera acest punct la dreapta, în interiorul segmentului AB. Obțin astfel punctul T, despre care știu că taie segmentul AB în raport extrem și mediu. Continuînd, voi scădea pe TB din TA și se va obține un alt punct. Drept să-ți spun, acum nu mă mai surprinde numirea de *tăietură de aur*! Proprietatea aceasta este într-adevăr neînchipuit de frumoasă, fiindcă exprimă o anumită armonie între toate aceste segmente care derivă unele din altele. Uite, adineaori, cînd am înțeles nesfîrșita continuitate a acestui proces, am avut senzația că aș fi la malul mării și aș privi neîncetatul joc al valurilor care vin să se sfarme de mal. Aceeași statornicie în dinamica acestor rapoarte, aceeași permanență.

— Tot așa s-au entuziasmat, cu peste 2 000 de ani în urmă, pitagoricienii cînd au găsit proprietățile acestui raport! Apoi, mai încoace, Luca Pacioli, și Leonardo da Vinci cînd i le-au regăsit. Și dacă din întreaga arhitectură antică, atît din cea egipteană, cît și din cea greacă, se desprinde un sentiment de armonie atunci cînd privești fie o singură construcție, fie un ansamblu arhitectonic, aceasta nu poate fi datorită întîmplării.

— Nu vrei să afirmi că și egiptenii cunoșteau tăietura de aur?

— De ce nu? De altfel nu o afirm eu, ci altcineva mai competent ca mine: Matila Ghyka, în cartea pe care te-ai temut s-o citești! El arată că dimensiunile camerei regelui din marea piramidă sînt alese în acest raport. Despre aceasta vom vorbi însă mai tîrziu. Mi-aduc aminte că mai de mult, prin 1931 am auzit o dată la radio pe marele nostru profesor și savant Gheorghe Țițeica vorbind despre tăietura de aur. Spunea el atunci că strămoșii noștri cei mai îndepărtați „aveau în instinct simțul proporției și cunoșteau, fără să fi învățat vreodată, proprietățile figurilor asemenea".

Că segmentele ale căror lungimi sînt în tăietura de aur stîrnesc instinctiv sentimentul de armonie, au observat-o

mulți. Uite, în cartea lui Matila Ghyka găsesc citată o cărțulie pe care am citit-o și eu mai de mult. Ascultă ce spune Matila Ghyka: „Timerding, în *Die Goldene Schnitt*, explică impresia vizuală agreabilă pe care o dă o secțiune de aur în cazul a trei linii orizontale".

— Cred că exemplul cel mai cunoscut și plastic totodată este linia care desparte marea de cer într-o marină. Această linie nu-i niciodată așezată la mijloc, ci de obicei în așa fel ca grosimea benzilor să fie una față de alta în raportul tăieturii de aur.

— Exact acest exemplu îl alege și Timerding. „Ochiul spune el — comparînd grosimea benzii mai înguste cu a celei mai late, taie în gînd o grosime din banda lată cît este grosimea celei înguste și atunci obține o bandă care satisface aceeași proporție, de unde impresia de repaus, de constanță, de siguranță într-un ritm continuat în mod nedefinit! Tăietura de aur se impune deci cînd două părți consecutive trebuie să facă parte, printr-o nouă subdiviziune, dintr-o progresie geometrică, reunind astfel triplul efect al echipartiției, al succesiunii și al proporției continue. Folosirea tăieturii de aur nu-i decît un caz particular al unei reguli generale, a aceleia de revenire la aceeași proporție în detaliile unui ansamblu".

— Iată că am ajuns la o nouă întrebare pe care doream să ți-o pun de mai înainte. Vorbim de un șir de segmente care se scad unele din altele la nesfîrșit. Nu cumva rezultă că segmentele aflate în tăietură de aur sînt incomensurabile?

— Sigur! De ce mă întrebi?

— Întîi fiindcă această proprietate este caracteristică pentru segmentele incomensurabile. Apoi pentru că aceste segmente incomensurabile mi se par cam străine; nu știu cum să-ți spun, dar nu-mi sînt prea simpatice!

— De unde ai mai scos-o și pe asta? Toate segmentele sînt la fel de simpatice, numai că prin definiție unele sînt mai accesibile decît altele. Cartea a X-a a *Elementelor* lui Euclid începe așa: „Se numesc mărimi *comensurabile* acelea care se pot măsura cu aceeași măsură, iar *incomensurabile* cele pentru care nu se poate afla o măsură comună". Asta-i tot. Dar ca să te deprinzi mai bine cu ele, hai să reluăm propor-

ția (1) și să notăm $AB = a$, $AT = b$ și $TB = c$, adică s-o scriem sub forma $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ și să alegem ca unitate de măsură a segmentelor segmentul cel mai mic, $TB = c$. Raportul $\frac{b}{c}$ dintre partea cea mai mare și cea mai mică a segmentului $AB = a$ se numește *număr de aur* și Matila Ghyka îl notează cu $\varnothing$. Rezultă atunci că avem

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \varnothing$$

sau încă, fiindcă $a = b + c$,

$$\frac{b + c}{b} = 1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c},$$

adică

$$1 + \frac{1}{\varnothing} = \varnothing. \tag{6}$$

— Interesant! $\varnothing$ este un număr incomensurabil care diferă de inversul lui prin unitate!

— Da, este irațional și îi poți aprecia ușor valoarea, fiindcă verifică ecuația de gradul al doilea

$$\varnothing^2 - \varnothing - 1 = 0 \tag{7}$$

Considerînd numai rădăcina pozitivă, avem

$$\varnothing = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887 5\ldots$$

Ca valoare aproximativă a numărului de aur se ia $\varnothing = 1{,}618$. Așadar, dacă știi lungimea segmentului mai mic, o afli pe a celui mai mare, înmulțind-o cu 1,618. Iată și o proprietate remarcabilă a lui $\varnothing$, care apare imediat din (6):

$$1 + \varnothing = \varnothing^2$$

și de aici

$$\varnothing + \varnothing^2 = \varnothing^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{8}$$

$$\varnothing^{n-2} + \varnothing^{n-1} = \varnothing^n.$$

Scriind termenii consecutivi într-un șir:

$$1, \varnothing, \varnothing^2, \ldots, \varnothing^n, \ldots \qquad (9)$$

acest șir este o progresie geometrică cu rația $\varnothing$. Mai mult, orice termen al acestei progresii este egal cu suma celor doi termeni precedenți, căci $\varnothing^n = \varnothing^{n-1} + \varnothing^{n-2}$, adică termenii șirului (9) au proprietăți aditive și totodată multiplicative.

— Vezi, abia acum înțeleg eu sensul cuvintelor din fraza citată după Timerding, care se referă la triplul efect: al echipartiției, al succesiunii și al proporției continue! Ascultînd de legea tăieturii de aur, numerele din acest șir au în adevăr însușiri extraordinare!

— Îmi pare rău că din cauza copacilor nu vezi pădurea!

— Care pădure ar trebui să o văd?

— Accentul nu trebuie pus pe această frază, respectiv pe însușirile acestor numere, oricît de extraordinare ar fi ele, ci pe fraza care urmează: „Folosirea secțiunii de aur nu-i decît un caz particular al unei reguli generale de revenire a aceleiași proporții în detaliile unui ansamblu". În această observație vei descoperi și legătura pe care mi-o cereai să ți-o arăt între modulorul lui Le Corbusier și tăietura de aur.

— E ușor să recunoști pădurea în care ești pădurar! De unde vrei să știu eu că secțiunea de aur „e un caz particular al unei legi mai generale"? Despre ce *caz general* poate fi vorba?

— Vezi! dacă n-ai vrut să citești cartea! Este vorba de legea creșterilor organice, asupra căreia a atras atenția întîi Leonardo Fibonacci atunci cînd și-a propus să socotească numărul perechilor de iepuri de casă care provin dintr-o pereche, știind că ei se nasc în fiecare lună și că puii sînt apți să nască și ei la rîndul lor alți pui tot după o lună. Acestei numărători îi corespunde șirul:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \qquad (10)$$

în care orice termen este suma celor doi termeni dinaintea lui. Cu alte cuvinte, termenul general al șirului are forma

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},$$

unde $n = 3,4,\ldots, n$, iar $u_1 = u_2 = 1$.

Acesta este șirul lui Fibonacci. I se mai spune „legea creșterilor organice", tocmai fiindcă prin acest șir de numere se exprimă creșterea organică sub forma ei cea mai generală.

— Bine. Prin urmare am aflat ce este tăietura de aur, numărul de aur și șirul lui Fibonacci, sau legea creșterilor organice. Mi-ai spus că acestea înseamnă cam unul și același lucru, dar eu nu văd cum!

— Vei vedea imediat. Ce-ai spune dacă ne-am propune acum problema inversă?

— Adică să determinăm un șir de numere așa fel ca termenii lui să aibă proprietatea termenilor șirului Fibonacci? Cum putem face asta?

— Uite cum. Scrie șirul $u_1, u_2,\ldots, u_n,\ldots$ și consideră $u_n = q^{n-1}$, adică consideră că termenul general al șirului are forma unei puteri, ca în cazul unei progresii geometrice cu rația q. Scriind proprietatea caracteristică, avem

$$q^{n-1} = q^{n-2} + q^{n-3}$$

și, simplificînd cu q^{n-3},

$$q^2 - q - 1 = 0.$$

— A! Iată surpriza! Regăsim relația pe care o satisface numărul de aur $\varnothing$:

$$\varnothing^2 - \varnothing - 1 = 0.$$

— Ai văzut legătura? Dar să mergem mai departe și să scriem soluțiile acestei ecuații:

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

pentru ca să găsim forma cea mai generală pe care o poate lua $u_n = q^{n-1}$. Dacă C_1 și C_2 sînt două constante arbitrare, atunci putem scrie

$$u_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \qquad (11)$$

După cum vezi, șirul în care termenul u_n are forma (11) (unde n poate lua pe rînd valorile $n = 1,2,...$) este cu mult mai general decît șirul lui Fibonacci, căci el depinde de valorile arbitrare ale constantelor C_1 și C_2.

— Atunci nu mai avem *un singur șir*, ci o infinitate!

— Exact. Ca să-ți dau o pildă, hai să regăsim șirul lui Fibonacci. Pentru aceasta n-avem decît să impunem condiția $u_1 = u_2 = 1$. Cele două ecuații care determină valorile lui C_1 și C_2 le aflăm din (11), adică facem $n = 1$ și $n = 2$. Anume:

pentru $n = 1$ avem $u_1 = 1 = C_1 + C_2$ și

pentru $n = 2$ avem $u_2 = 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

De aici rezultă

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$C_1 - C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Rezolvînd sistemul

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ și } C_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \qquad (12)$$

și înlocuind aceste valori în (11), se obține șirul lui Fibonacci:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (13)$$

— Bine, dar acum u_n are altă formă decît mai înainte!

— Te înșeli. Dacă îi dai lui n, pe rînd, valorile 1, 2, 3,..., vei obține șirul pe care îl cunoști:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 2 \text{ ș.a.m.d.}$$

Dacă ținem seama că am notat cu $\varnothing$ prima rădăcină $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a ecuației (7), cea de-a doua rădăcină a ei: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{2(1+\sqrt{5})} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1}{\varnothing}$ și deci termenul general al șirului (13), poate fi scris sub forma

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varnothing^n - \frac{1}{\varnothing^n}\right).$$

— Stai! Din cele ce-ai scris deduc că există nenumărate numere care au proprietatea numărului de aur. Toate numerele șirurilor (11)!

— Da, toate numerele șirurilor (11) să le numim dublu aditive, pe care le poți obține alegîndu-ți primii doi termeni după plac.

— Dar termenii din (11) nu sînt numai termenii unui șir dublu aditiv, ci în același timp și al unei progresii geometrice.

— Într-adevăr, șirurile determinate în condițiile discutate de noi au această proprietate suplimentară. Știi din care pricină?

— N-am ales noi singuri șirurile în care termenul general să aibă aceeași formă ca și termenul general al unei progresii geometrice, $u_n = q^{n-1}$? Dacă u_n n-ar fi fost o putere, desigur că termenii șirului (11) nu ar mai fi avut și caracteristica termenilor unei progresii geometrice.

— Exact, și n-am mai fi găsit nici numerele de aur! Rezultă că șirurile considerate de noi apar ca un caz particular al unor șiruri dublu aditive mult mai generale.

— Atunci, dacă folosesc numai definiția $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ și încep cu 1,1, am șirul lui Fibonacci:

1,1,2,3,5,8,13,...

Dacă încep însă cu 1,3, am alt șir:

1,3,4,7,11,18,29,...

sau, să zicem, că aș începe cu numerele 19, 66. Atunci șirul ar fi

19,66,85,151,...

— Da, toate șirurile acestea sînt dublu aditive și, după cît se pare, au calitatea de a reflecta numeric o însușire a materiei vii, aceea a creșterii realizate prin compuneri succesiv aditive. De pildă, botaniștii au găsit că distanțele dintre nodurile de pe o tulpină de unde se dezvoltă frunzele sînt repartizate aproximativ după această lege.

— De ce aproximativ?

— Fiindcă în procesul de dezvoltare a unei plante sau a unui animal apar uneori și condiții particulare, legate de sol, de climă sau de alți factori, imposibil de determinat. De aceea proprietatea de dublă aditivitate observată aici trebuie privită statistic, în medie, căci numai astfel se poate afirma că foarte multe dintre măsurători duc la această concluzie. Mai pregnant încă se remarcă această lege de creștere în forma cochiliilor melcilor sau a scoicilor, a coarnelor animalelor, a unor oase, cum ar fi femurul la om, unde, deși creșterea se face numai printr-o extremitate, se păstrează forma inițială, transformîndu-se numai în alta mai mare, asemenea ei.

— Mă iartă, dar eu nu văd nici o asemănare între cochilia unui melc și aceea a unei scoici. Prima e răsucită în spirală, ba la unii melci cochilia are forma unui con, și atunci spirala seamănă cu o elice care se înfășoară cu multă eleganță pornind de la vîrf pe con, pe cînd fața scoicii e plată, avînd numai niște striații pe ea. Ce să mai spunem de coarne și femur? Cum poți asocia aceste forme la un loc?

— Iacă bine! Dar, ca să nu-ți fie cu bănat, hai să vorbim întîi de melcul obișnuit, pe învelișul căruia tu ai observat o spirală. Să desenăm această spirală aici pe hîrtie (fig. 46). Deși toate curbele deschise care se înfășoară în felul acesta în jurul unui punct fix *O* se numesc spirale, trebuie să știi că există mai multe feluri de curbe spirale. Înfățișarea lor pare să fie aceeași, totuși altele sînt proprietățile lor geometrice. Aceea despre care vreau să-ți vorbesc se numește *spirala logaritmică*. Ea se deosebește de toate celelalte spira-

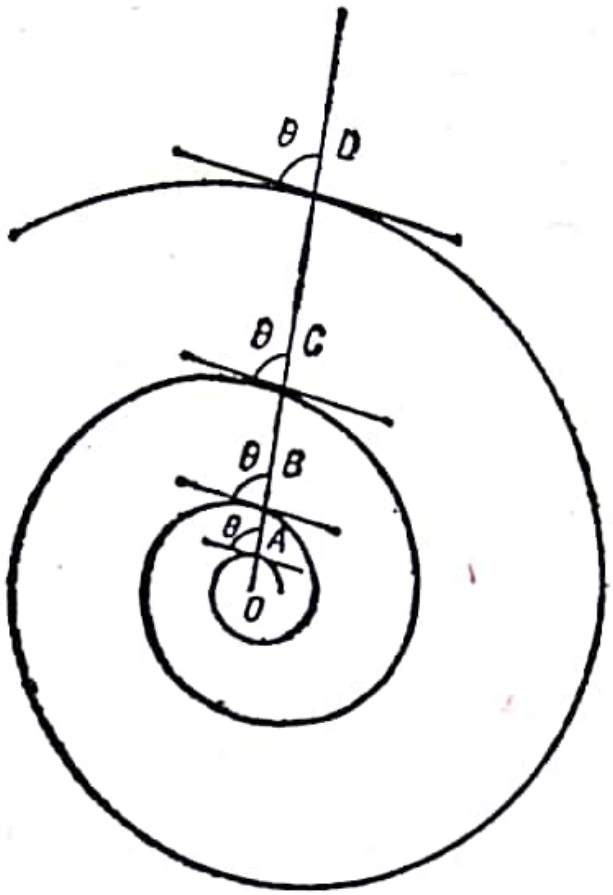


Fig. 46

le prin aceea că taie orice rază dusă prin O, după un unghi constant.

— Nu înțeleg ce vrei să spui.

— Știu. Ar fi fost foarte simplu dacă aș putea să-ți vorbesc în limbaj matematic, traducînd totul în formule, dar mă feresc s-o fac. Iată cum am să-ți explic. Să ducem o rază oarecare prin punctul fix O (fig. 46). Ea taie toate spirele acestei curbe în punctele A, B, C, D ș.a.m.d. Tangentele la spirală în A,B,C,D, fac același unghi θ cu raza dusă prin O, oricîte spire ai lua și oricare ar fi poziția razei.

— Atunci aici e ceva care-mi amintește de cerc, căci și razele cercului fac un unghi drept, deci mereu același, cu tangentele duse la punctele de contact.

— Așa-i. Spirala logaritmică e singura dintre spirale care se înrudește în acest sens cu cercul, iar dacă unghiul θ este drept, atunci spirala se închide, transformîndu-se în linia cercului. Dar nu despre această proprietate voiam să-ți vorbesc, ci despre alta, de la care i se trage și numele. Anume, dacă se consideră segmentele OA, OB, OC, OD... determi-

nate de spire pe această rază sau pe oricare alta, între aceste segmente există relațiile

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE} = \ldots = s.$$

— Stai! în acest caz, dacă $s = \varnothing$, urmează că segmentele determinate astfel pe oricare rază a spiralei logaritmice, prin care se și separă o spiră de alta, sînt în tăietură de aur? Așa ceva întîlnim pe cochiliile melcilor?

— Ai văzut? Spirala logaritmică nu s-a născut din imaginația matematicienilor, ci din pulsația vieții, din creștere regulată prin adăugare de elemente asemenea. Și ea are proprietatea că este asemenea cu ea însăși.

— Iar vorbești în bobote! Cînd două triunghiuri sînt asemenea, înseamnă că nu-s egale! Unu-i mai mare și altu-i mai mic!

— La triunghiuri da, dar la spirala logaritmică, ba! Căci, dacă vreau să măresc sau să micșorez o spirală logaritmică ca s-o transform într-o alta asemenea ei, regăsesc aceeași spirală de la care am pornit. Jacob Bernoulli a rămas așa de încîntat și de uimit de această proprietate, pe care a descoperit-o el întîi cu vreo 10 sau 20 de ani mai înainte de 1700, încît a cerut ca pe piatra mormîntului să-i fie săpată spirala logaritmică cu inscripția: *Eadem mutata resurgo*[1].

— Jacob? Eu parcă am citit undeva de un matematician cu numele Ioan Bernoulli.

— Al cîtelea?

— Lasă gluma, nu mă înșel. Era scris Ioan și nu cred că autorul a putut face o confuzie de nume.

— Dar nu glumesc de loc. Te cred că ai citit despre Ioan Bernoulli și eu repet întrebarea ca să-ți pot spune dacă era fratele, nepotul sau strănepotul lui Jacob Bernoulli.

— Atunci a existat o dinastie de matematicieni?

— Da, o adevărată dinastie Bernoulli. Din secolul al XVII-lea și pînă azi, familia Bernoulli, stabilită pe atunci la Bâle, numără printre descendenții ei direcți peste 120 de matematicieni, dintre care mulți au fost celebri. Talen-

[1] Mă transform, rămînind aceeași.

tul lor de matematicieni s-a remarcat întîi la cei trei frați Jacob, Nicolae I și Ioan I, care-și dispută gloria de a fi jucat un rol important atît în progresul și răspîndirea calculului diferențial și integral, cît și în domeniul aplicațiilor lui. Nicolae are un fecior, tot matematician de seamă, Nicolae al II-lea, iar Ioan are trei fii matematicieni: Nicolae al III-lea, Daniel și Ioan al II-lea, iar ultimul are, la rîndul lui, alți doi feciori matematicieni: Ioan al III-lea și Jacob al II-lea. Iată nouă matematicieni numai pînă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea. Cît de mare devenise faima lor o poți vedea dintr-o anecdotă pusă pe seama lui Daniel Bernoulli. Se spune că, fiind într-o călătorie, începuse o conversație cu un călător. Aflînd că e matematician și fiind bucuros că va putea discuta cu el, se recomandă: „Mă numesc Daniel Bernoulli". Atunci celălalt, căruia nu-i venea să creadă într-o asemenea întîmplare, privindu-l cîteva clipe în tăcere, i-a răspuns: „Și eu mă numesc Isaac Newton !". Anecdota nu spune dacă Daniel Bernoulli a rîs, ci numai că a considerat acest răspuns ca cea mai sinceră mărturie a stimei de care se bucura el și familia lui. Dar iar m-am lungit cu vorba și am uitat de spirală ! Acum poate vei admite că și striațiile de care ai pomenit tu la scoică sînt tot porțiuni de spirală logaritmică. Această curbă, fiind expresia geometrică a mecanismului creșterilor organice, a fost identificată și pe femur, pe coarnele animalelor și în foarte multe alte forme vii. Știi că pînă și ochiurile de pe coada păunului se așază pe ramurile a două spirale logaritmice cînd păunul se umflă și și-o desface în toată splendoarea ei?

— Atunci nu cumva așa se explică și preferința pe care o are ochiul omenesc pentru mărimile ale căror dimensiuni se află în raportul tăieturii de aur, găsindu-le în acest caz mai armonios alcătuite?

— Nu știu, dar cred că ai dreptate. Armonia nu-i doar altceva decît coexistența normală, naturală și deci fericită a lucrurilor sau a ființelor. Reprodus de mii și mii de ori de-a lungul mileniilor în diferite forme din lumea plantelor și a animalelor,ochiul omenesc s-a deprins cu raportul tăieturii de aur din moși-strămoși și de aceea îi place fără să mai întrebe de ce. Tot așa s-a deprins cu planul de

simetrie vertical pe care-l vede în corpul lui sau al celorlalte animale și uneori la plante. Spune-mi care artist s-ar încumeta să introducă într-un monument un plan de simetrie orizontal? Ai văzut așa ceva? Cred că nu, fiindcă această simetrie față de un plan orizontal n-ar produce plăcere! La fel și în arhitectură; lăsînd deoparte detaliile de decorare a suprafețelor clădite, ochiul omului este în primul rînd influențat de raportul dintre volumul construit și acela al spațiului care-l adăpostește. Modul de repartiție al greutăților va stîrni în el sentimentul frumosului, al echilibrului, al armoniei sau nu. În frumoasa lui carte de arhitectură despre care am mai vorbit noi cîndva, Vitruviu atrage atenția atît asupra acordului care trebuie stabilit între părțile unei clădiri cît și ale acestora față de ansamblu.

— Acest sfat al lui Vitruviu se potrivea atunci ca și acum. Arhitecții romani țineau seama de el; dovadă armonia pe care o degajează monumentele lor arhitectonice. Azi...

— Ce azi? Oare cerințele civilizației noastre se mai potrivesc cu cele ale civilizației antice? Oare spațiul-timp de acum, determinat prin fabricile construite pe sute de hectare, barajele și hidrocentralele uriașe, avioanele supersonice, ca să nu mai vorbesc de zborurile extraterestre, este același cu spațiul-timp corespunzător civilizațiilor apuse? Crezi că arhitectura modernă se mai poate adapta la vechile reguli? Nu! Ea trebuie să-și creeze tipare noi de armonie, compatibile cu viața noastră, așa cum se desfășoară ea acum. Ea a trebuit să afle secretul de a declanșa emoția artistică în aceste noi condiții, oferite de actualul spațiu-timp.

— Atunci modulorul lui Le Corbusier deține acest secret?

— După cîte înțeleg eu, se pare că da. Luînd *omul* ca etalon, așa cum au făcut-o de altfel și cei antici, și folosind o lege a creșterilor organice din care-și extrage numerele de aur corespunzătoare dimensiunilor cerute de epoca modernă, el stabilește o nouă scară de proporții, pe care o numește *modulor* și care are toate șansele să redea arhitecturii armonia corespunzătoare noilor condiții ale civilizației noastre, păstrînd totodată caracterul seninătății interioare din operele clasice.

— Cred că armonia clasică e definitiv zdruncinată. Nu văd cum ar putea fi restabilită cînd ea era legată, cum ai spus și tu, de spațiul și de timpul oferit de civilizația antică?

— Nu-i așa. Uiți că în toate acele construcții antice se ținea seama de raportul tăieturii de aur și că acesta reflecta caracterul creșterii organice? Or, grija de căpetenie a lui Le Corbusier a fost ca, schimbînd numai etalonul, să țină seama, în distribuția dimensiunilor, de acest raport. Etalonul lui Le Corbusier este un segment egal cu înălțimea unui om mijlociu stînd în picioare și avînd un braț ridicat, adică 216 cm. În acest caz, ombilicul împarte acest segment în două părți egale, fiecare de 108 cm. Ținînd seama că unul dintre cele două segmente de 108 cm este împărțit (aproximativ) în secțiunea de aur prin lungimea de la vîrful degetelor la cap (41,5) și de la cap la ombilic (66,5 cm), se formează astfel un șir aditiv

41,5; 66,5; 108; 174,5...

care reprezintă scara-modulor.

— Dar de ce începe de la 41, 5? Iată termenii anteriori:

0,5; 8; 8,5; 16,5; 25;... nu-i așa?

— Nu-i greu să-i obții aplicînd scăderile succesive, dar nu știu dacă-s necesari. Avantajul acestei scări constă în aceea că, pornind de la acest modulor, se pot face diferite combinații care să asigure ca dimensiunile necesare într-o lucrare să fie în tăietură de aur.

— Și prin aceasta s-a rezolvat problema?

— A, nu! Soluția ar fi prea simplistă și însuși Le Corbusier are grijă să atragă atenția asupra acestui fapt, spunînd: „Modulorul nu dă talentul și încă mai puțin geniu. El nu subțiază ceea ce nu-i subțire; el oferă doar plăcerea și încrederea care poate rezulta din folosirea măsurilor sigure".

— În acest sens sînt de acord cu tine. Descoperirea legilor artistice rămîne un vis al umanității. Însă arta cere ceva mai mult decît selectivitate, abilitate, organizare și principii descoperite și formulate matematic. În acest sens, da, modulorul rămîne un instrument, o daltă în mîna sculptorului care va realiza opera.

* * *

De-abia a doua zi am putut continua discuția, căci prietenul meu a dorit să se ducă pe la Seminarul matematic „A. Myller" „ca să mai răsfoiască niște hîrțoage".

— Înainte de toate, a început Teodor Solonar, află că aseară am citit ceva foarte nostim în legătură cu numărul de aur și cu piramida lui Keops. Cred că ai auzit că sînt unii care pretind că egiptenii și-au scris toate cunoștințele lor matematice „în piatră", anume că ele pot fi găsite în dimensiunile marii piramide. Analizînd măsurătorile făcute de geodezi și de astronomi asupra mărimii sau orientării piramidei Keops, ei au dedus că egiptenii cunoșteau cu exactitate nu numai dimensiunile Pămîntului și distanța lui pînă la Soare, ba chiar și valoarea lui π, cu aceeași aproximație pe care o știm și noi. Or, această din urmă afirmație contrazice însești datele care se găsesc în manuscrisele rămase de atunci, din care reiese că egiptenii considerau $\pi = 3{,}16$ și nu aproximativ $\pi = 3{,}14$.

— O, da, am citit și eu odată cu mare plăcere chiar cartea abatelui Th. Moreaux. Erau acolo lucruri fantastice.

— Într-adevăr fantastice. Dar numai atît. În privința numărului π, cel puțin, există o explicație, de vină fiind tăietura de aur.

— De vină! Cum?

— Fiindcă, după cum ți-am mai spus, egiptenii cunoșteau proprietățile estetice ale raportului dintre două segmente aflate în tăietura de aur și se foloseau de el cînd stabileau dimensiunile clădirilor sau ale piramidelor. Astfel, Herodot povestește că preoții egipteni i-au spus că aria fiecărui triunghi lateral al piramidei este egală cu a pătratului înălțimii piramidei. Or, semiprofilul meridian al marii piramide este un triunghi dreptunghic, ale cărui laturi (a,b,c) sînt în progresie geometrică: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Însă, fiind vorba despre un triunghi dreptunghic, rezultă, după teorema lui Pitagora, că $a^2 = b^2 + c^2$ sau, împărțind cu c,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1; \qquad (14)$$

dar $b^2 = ac$; aşadar (14) devine

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1 + \frac{a}{c}$$

şi, notînd $\frac{a}{c} = \varnothing$, avem $\varnothing^2 = 1 + \varnothing$.

Iată dar că laturile acestui triunghi dreptunghic se află în tăietură de aur, ca număr de aur $\varnothing = \frac{a}{c}$ fiind ales raportul dintre ipotenuză şi cateta cea mai mică. Însă, din întîmplare, valoarea aproximativă a lui $\sqrt{\varnothing}$ este foarte apropiată de aceea, tot aproximativă, a lui π, după cum te poţi încredinţa tu singur:

$$\sqrt{\varnothing} = 1{,}272 \text{ şi } \frac{4}{\pi} = 1{,}273$$

$$\frac{1}{\varnothing} = 0{,}618 \quad \text{şi} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}617.$$

— Am înţeles unde vrei să ajungi. În acest caz e posibil să se facă confuzie între π şi $\varnothing$.

— Într-adevăr, aşa s-a şi întîmplat. Dacă se calculează valoarea comună a rapoartelor $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, ţinînd seama că $\frac{a}{c} = \varnothing$ şi că $b^2 = ac$, avem sau

$$\frac{a}{b} = \frac{c\varnothing}{\sqrt{c^2\varnothing}} = \varnothing,$$

sau:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{4}{\pi}.$$

— Şi s-a considerat că $\frac{b}{c} = \frac{4}{\pi}$ în loc de $\frac{b}{c} = \sqrt{\varnothing}$?

— Exact. Făcîndu-se această confuzie, s-a afirmat că egiptenii cunoşteau valoarea $\pi = 3{,}14$, fiindcă raportul dintre aria bazei mari a piramidei lui Keops ($4c^2$) şi aria secţiunii meridiane cb este:

$$\frac{4c^2}{cb} = \frac{4c}{b} = \pi$$

în loc de

$$\frac{4}{\sqrt{\varnothing}} = 3{,}14\ldots$$

În legătură cu aceasta mi-aduc aminte de un foarte interesant articol publicat în *Comptes rendus* din Paris în 1947 de marele matematician francez Paul Montel. El arată că, din punct de vedere matematic e imposibil ca egiptenii să fi îngrămădit în dimensiunile unei piramide atîtea date științifice diferite, cum susțin unii dintre entuziaștii cercetători că ar rezulta din măsurătorile făcute. Singura valoare pe care egiptenii au gravat-o cu adevărat în piramida lui Keops este aceea a tăieturii de aur, construind triunghiul dreptunghic meridian cu laturile în acest raport. Acest triunghi se numește chiar *triunghiul egiptean*.

— Dar eu cunosc un alt triunghi dreptunghic care e cunoscut tot sub numele de *triunghiul egiptean*: acela cu laturile proporționale cu numerele 3,4 și 5.

— Ai dreptate, și acest triunghi a fost folosit de egipteni. El se găsește în semiprofilul altei piramide din Gizeh. Fiind însă singurul triunghi dreptunghic în care laturile sînt în progresie aritmetică, el se numește și *triunghiul egiptean perfect*.

— Atunci foarte probabil că grecii au luat noțiunea tăieturii de aur de la egipteni? Pitagora a fost în Egipt și, după cum mi-ai spus, pitagoricienii au cunoscut-o. Se știe cum?

— Sigur nu se știe nimic. Însă din diferite surse antice reiese clar că pitagoricienii cunoșteau numerele irațională și tăietura de aur. Prima și cea mai veche relatare se datorește lui Platon. În *Timeu*, el arată că pitagoricienii dădeau o deosebită atenție studiului celor cinci poliedre regulate convexe...

— Oprește-te, ca să-ți spun eu cum le consideră Platon în *Timeu*: *tetraedrul*, simbolul focului, fețele lui sînt 4 triunghiuri echilaterale: *cubul* are 6 fețe pătrate și este simbolul pămîntului; *octaedrul*, mărginit de 8 triunghiuri echilaterale, este simbolul aerului; *icosaedrul*, cu 20 de triunghiuri echilaterale ca fețe, este simbolul apei și, în fine, *dodecaedrul*

simbol al cosmosului cu tot ce cuprinde el, este singurul poliedru regulat cu fețe formate din pentagoane în număr de 12 și nu din triunghiuri sau din pătrate. De aici vine și termenul *chintesență (quintaesentia)*, adăugată la cele patru „elemente": aerul, apa, pămîntul și focul.

— Acest simbolism pe care-l introduci tu are o explicație: Platon, ca și ceilalți filozofi din antichitate, considera că focul, pămîntul, aerul și apa sînt *elemente* primordiale, *atomii* din combinarea cărora s-a format universul cu tot ce există în el. Or, era natural ca Platon, admirator al geometriei, să caute o corespondență, o analogie de natură geometrică pentru aceste elemente și ea i-a fost sugerată de cele cinci poliedre regulate pe care le-a studiat în școala lui Pitagora. Astfel, datorită formei lor remarcabile, aceste poliedre au devenit simbolul „elementelor". Anume a considerat că cele patru poliedre regulate cu suprafața compusă din triunghiuri sau pătrate corespund celor 4 elemente. Dodecaedrul, cu forma sa aproape sferică, din care cauză i se și spunea *sfera făcută din 12 pentagoane regulate*, a fost considerat că evocă însăși sfera cerească și de aceea că ar reprezenta imaginea universului întreg. Așadar, de la Platon avem cea mai veche mărturie despre cunoașterea tăieturii de aur de către pitagoricieni. A doua mărturie e aceea a lui Iamblic din Calcida, care a trăit pe la sfîrșitul secolului al III-lea și începutul celui de-al IV-lea. El a scris mai multe cărți despre viața și operele pitagoricienilor. În acelea care au ajuns pînă la noi se menționează faptul că Hippasus din Metapont, elev din școala lui Pitagora, a pierit într-un naufragiu, pedepsit fiind de zei pentru că s-a lăudat cu descoperirea dodecaedrului.

— Cunosc această legendă. Am citit-o în tinerețe și de multe ori m-am gîndit cu înfiorare la ea, plîngîndu-l pe Hippasus!

— Asta fiindcă erai și tu în tinerețe cam limbut, nu-i așa?

— Chiar dacă vrei să faci o glumă, nu-ți răspund. În sufletul meu s-a jucat multă vreme tragedia acestui tînăr plin de entuziasm, capabil să înțeleagă geometria cum puțini erau pe vremea lui și, poate, cam naiv. Pitagora l-a remar-

cat, îi prețuia calitățile și-i plăcea să privească cum se reflectau în lucirea ochilor lui adevărurile matematice pe care el le încredința în taină elevilor săi. Dar școala în care intrase Hippasus nu se potrivea cu firea lui comunicativă și prietenoasă. Aici toți se legau cu jurămînt să nu divulge, nimănui și niciodată, nimic din ceea ce vor învăța sau vor descoperi. Totul era comun, deși nu erau toți egali, ci se supuneau cu toții învățătorului, căruia „nici chiar numele nu trebuia să i-l pronunți". I se spunea numai *Acela* sau *El*. La început Hippasus s-a simțit chiar fericit. Pricepea ușor problemele despre numerele întregi și a înțeles repede natura numerelor fracționare, prin care putea exprima atît raportul dintre lungimea unei coarde care vibrează și nota pe care o emite, cît și legea de constanță a sunetelor. I se părea că numerele au o viață a lor și era mîndru că a cunoscut tovărășia pe care numerele fracționare o țineau numerelor întregi. Dar într-o zi învățătorul i-a destăinuit că asta nu-i tot ce se știe despre numere. Că mai este ceva despre care ar fi mai bine nici să nu se vorbească... Că există încă și niște numere fără rațiune de a fi, numere iraționale...

— Existența numerelor iraționale i s-ar fi putut dezvălui și fără intervenția lui Pitagora. Legea consonanței putea să-l ducă într-acolo sau construirea pentagonului, mai ales dacă admiți că a lui este descoperirea dodecaedrului!

— Oricum a fost, sînt sigur că din clipa aceea Hippasus n-a mai avut liniște, căci acest lucru neînchipuit de frumos era prea greu ca să-l poată păstra în tainița sufletului său. Simțea nevoia să vorbească, să-și descarce sufletul plin de uimire. Probabil că a și întîlnit pe cineva, i-a destăinuit taina care-l apăsa. Și, așa cum se întîmplă uneori, acela n-a fost demn de încrederea acordată. Poate peste măsură de mîndru că posedă un atare secret, poate din răutate sau din prostie, l-a împrăștiat. Știi care a fost sentința! Pitagora și elevii lui zideau mormîntul în care nu avea să zacă trupul, ci sufletul lui Hippasus, poate tocmai pe cînd acesta, zdrobit de durere și de remușcare, alerga spre învățătorul pe care-l adora, ca să-și mărturisească vina și să-i ceară iertare! N-a mai ajuns pînă la el. Pe drum, văzînd un mormînt nou proaspăt înălțat, s-a apropiat în grabă să vadă cine a putut muri

în răstimp și a văzut că era mormîntul lui. La început s-a uitat nedumerit, apoi, stînd acolo și privindu-l, a simțit că sufletul lui murea cu adevărat, că nu mai rămînea din el decît trupul, sortit să poarte prin lume cadavrul sufletului său. Poți înțelege asta? El era adînc și puternic legat de Pitagora, de comunitatea în care intrase și învățase și nu putea trăi în afara ei. De aceea sînt sigur că naufragiul a fost pentru el binecuvîntarea și nicidecum blestemul zeilor.

— Lasă poezia, bădie, că doar nu mai ai 18 ani, ci slavă Domnului..., încă multișori alții pe deasupra, buni, bunuți, bătuți pe muchie...

— Ți-am mai spus că aș lăsa-o eu, dar nu mă lasă ea pe mine, bătu-o-ar vina! Îngăduie-o și tu, că n-am ce face, și spune-mi dacă mai întărește cineva mărturia despre pitagoricieni.

— Da, tot așa spune și Proclus, matematician și filozof neoplatonician care a trăit în secolul al V-lea la Atena. În *Comentariile* lui la *Elementele* lui Euclid, comentarii în care se găsesc și toate cunoștințele asupra istoriei matematicilor pe care le scrisese Eudem din Rodos, Proclus spune că teoria numerelor iraționale a fost descoperită de pitagoricieni, ca urmare a meditațiilor lor asupra mărimilor și caracteristicilor lor de a fi sau nu măsurabile cu aceeași unitate de măsură.

Sînt mulți dintre cei ce se ocupă cu istoria matematicilor care admit că pitagoricienii au descoperit tăietura de aur prin construcția pentagonului regulat. Problema se găsește în cartea a IV-a a *Elementelor* lui Euclid, carte atribuită pitagoricienilor. De altfel, tăietura de aur intervine în toate problemele în care apare împărțirea cercului în 5, 10, 15, ... părți egale.

— Știu că pitagoricienii aveau ca semn de recunoaștere între ei pentagrama sau pentagonul stelat, și în legătură cu aceasta cunosc o altă legendă, povestită tot de Iamblic.

— Te gîndești la aceea cu hangiul cel milos care l-a îngrijit pe un pitagorician bolnav și sărac, iar acesta, drept mulțumire, a cerut o tăbliță pe care a desenat pentagrama, spunînd hangiului s-o atîrne undeva la vedere?

— Da. Apoi, trecînd odată pe la han un străin și văzînd tăblița, s-a interesat de proveniența ei și a răsplătit cu generozitate bunătatea hangiului.

Pentagrama se construiește ducînd diagonalele în pentagonul regulat. Se pare că pitagoricienii au ales ca semn de recunoaștere tocmai pentagrama în amintirea acestei mari descoperiri, a construirii pentagonului regulat, făcută în școala lor.

— E greu de construit un pentagon regulat?

— Nu, construcția nu-i grea, dar demonstrația este mai dificilă, fiindcă ea include împărțirea segmentului în raport extrem și mediu.

— Atunci de ce n-am învățat la școală construirea lui, așa cum am învățat-o pe aceea a triunghiului echilateral, a hexagonului sau a pătratului?

— Știu eu? Cred că tot așa de bine ai putea să mă întrebi de ce înscrierea pentagonului în cerc era în evul mediu un secret chiar pentru pictori?

— Te întreb cu plăcere!

— Păcat că nu-ți pot răspunde. Știu doar că, atunci cînd Albert Dürer a publicat cartea sa în care arată cum se poate construi un pentagon regulat cu o singură deschizătură de compas, în lumea pictorilor faptul a fost considerat ca un mare eveniment și comentat îndelung.

— Dacă procedeul nu-i complicat, arată-mi și mie unul.

— Bine, iată o construcție care a fost propusă de Ptolemeu în vestita sa carte *Almagesta*.

— Mi-ai spus că în evul mediu metoda era secretă și acum vrei să-mi arăți o metodă expusă de Ptolemeu, care, după cîte știu, a trăit prin secolul al II-lea al erei noastre! Nu ți se pare că te contrazici?

— De ce? Se vede că tot gîndindu-te la latura pentagonului ai uitat istoria, deși-i specialitatea ta! Europenii au cunoscut scrierile matematicienilor greci tîrziu în Renaștere! Deși prima traducere în limba latină a *Almagestei* s-a făcut prin secolul al XII-lea, ea a rămas numai în manuscris. S-a tipărit în secolul al XV-lea. Dar și atunci: cîți puteau oare s-o aibă și s-o citească?

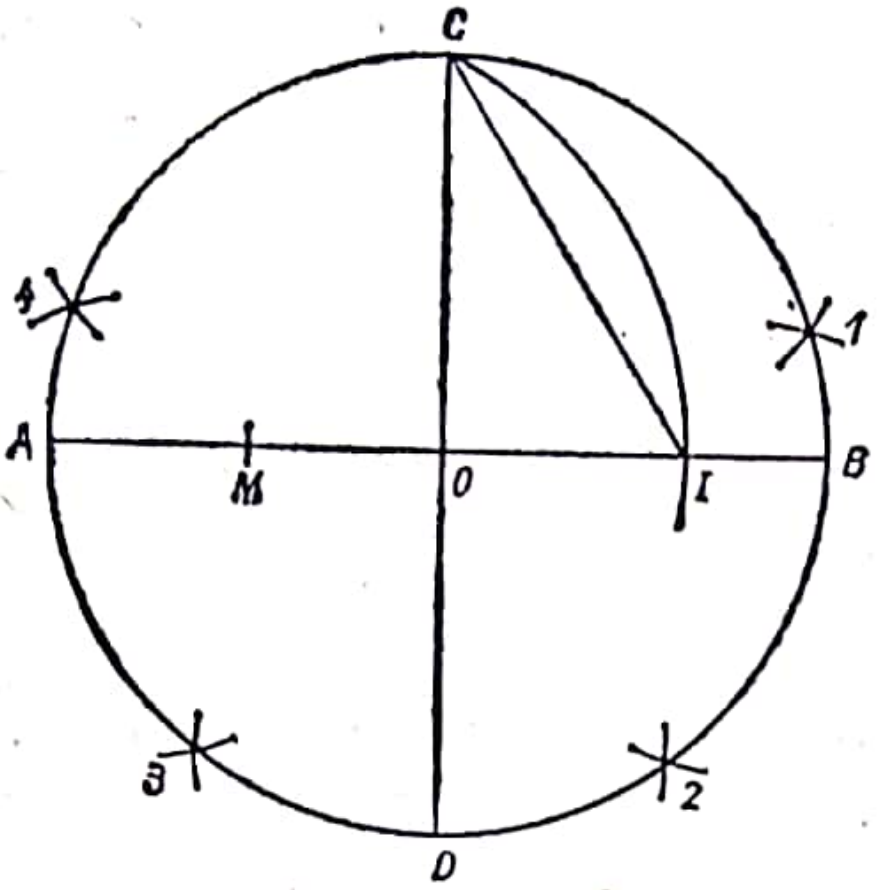


Fig. 47

Construcția despre care-ți spuneam este: în cercul dat (fig. 47) se duc doi diametri perpendiculari AB și CD și se împarte raza OA în două: $AM = MO$. Din M ca centru și cu raza MC se duce arcul de cerc CI, I fiind pe AB. Coarda CI este latura pentagonului. Luînd-o în compas vei împărți cu ea cercul în cinci părți egale. Dacă unești punctele de diviziune din două în două pe sărite, obții pentagonul regulat stelat, sau pentagrama. Dar din construcția pe care ți-am arătat-o obții și latura decagonului înscris în același cerc. Este segmentul OI.

Din figură observ că $\overline{CI}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OI}^2$, adică latura pentagonului este ipotenuza unui triunghi dreptunghic în care cele două catete sînt latura hexagonului înscris în același cerc (fiindcă ea e egală cu raza) și latura decagonului.

— Așa mai zic și eu! Aceasta este într-adevăr una dintre proprietățile remarcabile ale pentagonului înscris. Dar am să-ți arăt altă relație și mai grozavă! Euclid o menționează

în cartea a XIII-a, iar unii autori o atribuie lui Eudoxus din Cnidos.

— Care anume?

— Te rog să observi ce figură s-a format în interiorul pentagonului stelat (fig. 48).

— Un nou pentagon regulat!

— Și dacă ai duce diagonalele acestui nou pentagon regulat? (fig. 49).

— Extraordinar, un nou pentagon stelat. Și ne putem imagina că acest șir de pentagoane alternînd cu pentagrame este nesfîrșit. Rezultă de aici că latura pentagonului și a pentagramei nu se pot măsura cu o unitate de lungime comună, oricît de mică și de finită ar fi ea.

— Așa-i. Ai descoperit astfel că raportul dintre lungimile celor două laturi nu se pot exprima prin cîtul a două numere întregi, adică nu este un număr rațional. Pitagoricienii au putut ajunge la noțiunea de *mărimi incomensurabile* cunoscînd numai teoremele despre suma unghiurilor dintr-un triunghi și despre egalitatea laturilor egal înclinate pe baza triunghiului isoscel, teoreme despre care nu se îndoiește nimeni că le știau. Iată cum poți stabili incomensurabilitatea din cercetarea figurii. Hai să punem litere la vîrfurile pentagonului care s-a format din intersecțiile laturilor pentagonului stelat (fig. 48). Nu-ți este, cred, de loc greu să stabilești egalitățile care decurg din observația că triunghiurile CBd, ABe, DEa și DbC sînt isoscele. Avem astfel

$$BC = dC \quad \text{și} \quad aC = ad,$$

iar de aici

$$AC - BC = AC - dC = Ad;$$

dar $Ad = aC = ad$, căci și triunghiul Cad este isoscel, deci

$$AC - BC = ad.$$

— Așadar, *diferența dintre latura pentagonului stelat și latura pentagonului regulat înscris în același cerc este egală cu latura următorului pentagon stelat ce se formează, ducînd diagonalele în pentagonul interior.*

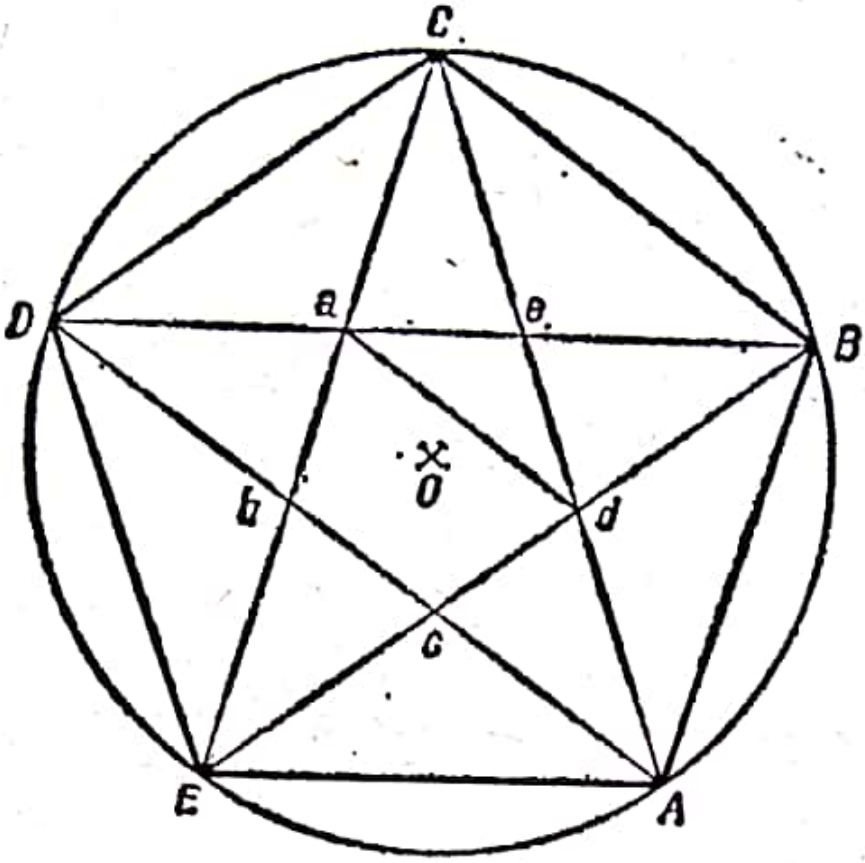


Fig. 48

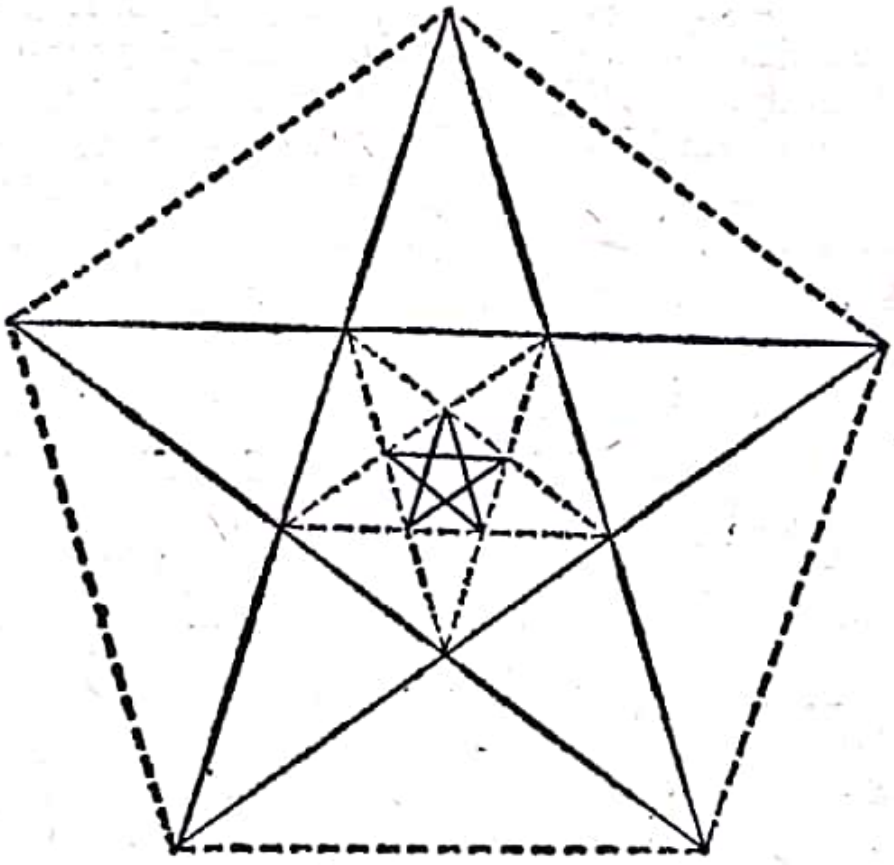


Fig. 49

— Acum vom mai stabili ceva. Poți să-mi spui cum sînt triunghiurile isoscele dBe, dCB și BEC care au unghiurile din vîrf B, C și E egale?

— Mănăstire-ntr-un picior, ghici, ciupercă, ce-i? Orice copil știe că triunghiuri isoscele cu unghiurile la vîrf egale sînt asemenea!

— Atunci scrie proporționalitatea laturilor!

— Să-ncerc:

$$\frac{de}{dB} = \frac{dB}{CB} = \frac{CB}{CE}.$$

— Și acum să ținem seama de egalitățile de segmente pe care le-am observat înainte: $dB = eC$, $CB = dC$ etc. Rezultă $\frac{de}{eC} = \frac{eC}{dC}$ sau, ceea ce este același lucru, $\frac{ed}{dA} = \frac{dA}{eA}$ și tot așa $\frac{CB}{CA} = \frac{dA}{CB}$, care se mai poate scrie încă $\frac{Cd}{CA} = \frac{dA}{Cd}$. Vrei să te uiți pe figură ca să vezi ce înseamnă?

— De vrut vreau, dar de văzut mă tem că-i mai greu! Ba nu, este vorba de tăietura de aur! Aceste proporții arată că:

1) *fiecare latură a pentagonului stelat este împărțit în tăietura de aur de oricare dintre celelalte două;*

2) *latura pentagonului stelat este împărțit în tăietura de aur de latura pentagonului regulat înscris în același cerc.*

— Îți spun drept că meriți toate laudele posibile!

— Atunci și tu meriți o cafea!

*

* *

— Am citit ieri la Seminarul matematic ceva care-ți va produce, cred, oarecare surpriză, mi-a spus Teodor Solonar după ce ne-am băut cafeaua. Într-o carte de curînd tipărită, scrisă de Herbert Meschkowski și intitulată *Modul de gîndire al marilor matematicieni*, autorul arată că nu toți cercetătorii de istorie a matematicilor sînt de acord cu ipoteza, așa de larg răspîndită, că prin construcția pentagonului, Hippasus și pitagoricienii ar fi trebuit să cunoască tăietura de aur. Anume se arată că e posibil să se construiască un pentagon regulat și deci să se stabilească incomensurabili-

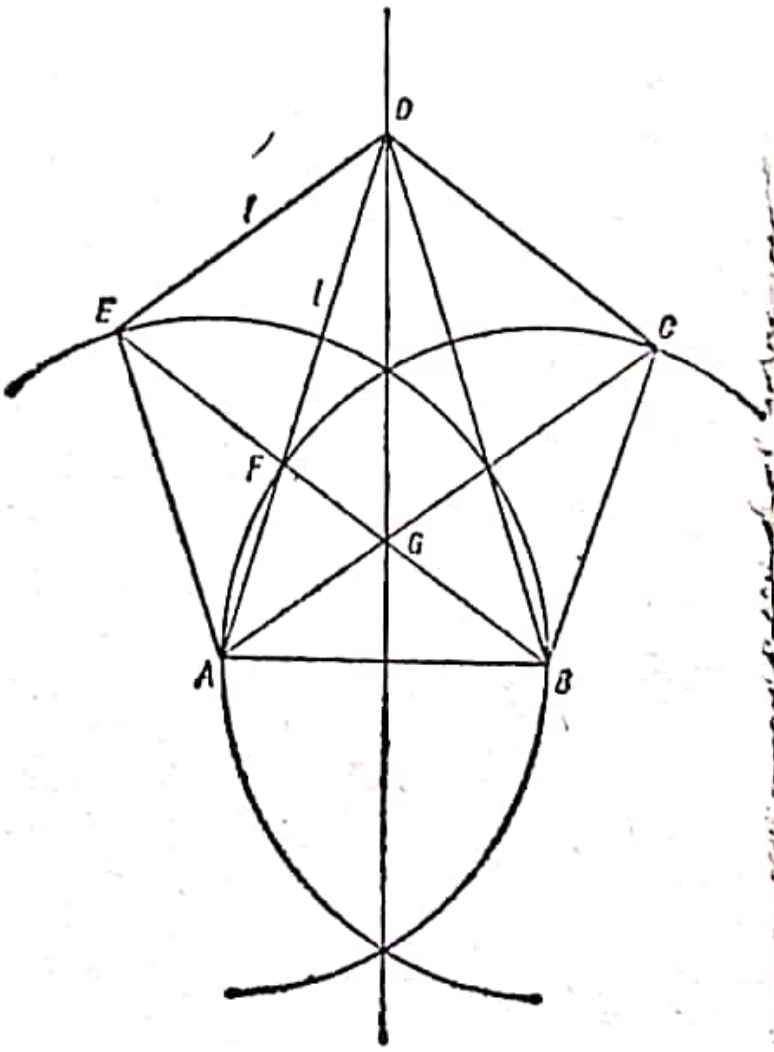


Fig. 50

tatea dintre latura și diagonala lui fără a se folosi împărțirea segmentului în raport extrem și mediu.

— E, într-adevăr, surprinzător; înseamnă că ștergi cu buretele tot ce mi-ai spus pînă acum!

— Nu-i chiar așa, fiindcă construcția pentagonului după această nouă metodă cere să folosești nu numai rigla și compasul, ci pe deasupra și o riglă gradată, ceea ce este cu totul altceva decît o construcție numai cu rigla și compasul.

— Dar mi se pare că geometrii greci nu erau de acord cu altfel de construcții decît acelea cu rigla și cu compasul!

— Într-adevăr și tocmai de aceea părerile sînt împărțite!

— Ai putea să-mi arăți cum se procedează?

— Da, nu-i greu. Dacă AB este latura pentagonului (fig. 50), atunci se ridică mediatoarea pe AB și apoi, din

B ca centru și cu o rază cît AB, se descrie un arc de cerc.

— Pînă aici, după cîte văd, este vorba de o construcție obișnuită cu rigla și cu compasul!

— Pînă aici da. Însă mai departe procedeul se schimbă. Anume se marchează pe o riglă lungimea $l = AB$ a laturii pentagonului și apoi se așază rigla în așa fel ca ea să treacă prin punctul A, iar cele două extremități ale segmentului însemnat pe ea să fie situate una în F, pe arcul de cerc descris din B ca centru, iar cealaltă în D, pe mediana dusă pe AB. Astfel se determină încă un vîrf, D, al pentagonului. Vîrful C se obține impunînd riglei gradate să treacă prin A, iar extremitățile segmentului $l = AB$ să fie una pe mediană, în G, și cealaltă în C, pe cercul cu centrul în B.

Ţinînd seama de simetria pentagonului, rezultă că ultimul vîrf E se va găsi construind un arc de cerc cu centrul în A și cu raza AB și așezînd rigla marcată așa fel ca să treacă prin B, iar extremitățile segmentului de lungime l, însemnat pe riglă, să cadă una pe mediană, adică în G, și cealaltă pe arcul de cerc dus prin A, adică în E. Dacă mă uit bine la figură, văd și cum s-a ajuns la această construcție.

— Adevărat, se folosesc numai teoremele despre suma unghiurilor unui triunghi și despre egalitatea unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel. E ușor de observat că unghiurile ABG, AEG etc. sînt a treia parte din unghiul B sau E întreg și de aici rezultă că triunghiurile BCG și EDF sînt isoscele și egale.

— Deși demonstrația e simplă, totuși înclin să cred că pitagoricienii au refuzat acest mijloc „barbar" de construcție. Mi-ai spus cîndva că ei, ca și platonicienii, și-au făcut un titlu de glorie din rezolvarea problemelor geometrice numai cu rigla și cu compasul!

— Da, asta-i cam așa. Noi doi vom continua să credem, după cum afirmă și tradiția, că pitagoricienii sînt descoperitorii numerelor iraționale și a tăieturii de aur.

— Iar nu te înțeleg! De ce le separi? O dată ce au dat peste tăietura de aur, e clar că au descoperit și numerele iraționale!

— Nu-i chiar așa, căci nu se știe cum au ajuns pitagoricienii la descoperirea numărului irațional. Tradiția consemnează două căi diferite: una este aceea a tăieturii de aur, cealaltă prin teorema lui Pitagora. Exemplul a devenit clasic: vorbește de el Platon, îl reia Euclid.

— Așa-i. Acum mi-aduc aminte. Este vorba de $\sqrt{2}$, mărimea diagonalei pătratului de latură 1, despre care Platon spunea „cine nu știe că diagonala pătratului este incomensurabilă cu latura lui nu-i demn de numele de om!".

— Vezi, era cît pe-aci să te numeri și tu printre ei! Prin urmare, am avut dreptate să separ cele două noțiuni. Descoperitor dacă nu al teoremei care-i poartă numele, fiindcă teorema lui Pitagora se cunoștea cu multă vreme înaintea lui Pitagora, dar cu siguranță a demonstrației ei, Pitagora și-a putut da seama că latura pătratului este incomensurabilă cu diagonala lui, observînd că aria pătratului construit pe semidiagonalele lui este egală cu jumătate din aria lui, iar procesul de construire a acestor pătrate pe semidiagonalele pătratelor anterioare se poate continua la nesfîrșit. Totuși nu se știe prin ce demonstrație a stabilit Pitagora iraționalitatea lui $\sqrt{2}$. Aristotel, ca și Euclid, folosește o demonstrație prin reducere la absurd. Apoi Platon în dialogul său...

— Cunosc prea bine acest dialog. E acela cu Teetet, elevul lui Teodor din Cirene.

— Da. Se spune că Teodor din Cirene a fost și profesorul lui Platon și a ținut un curs la Atena despre numerele iraționale. El a arătat că toate pătratele care au aria exprimată prin unul dintre numerele 3, 5, 7, 11, 13, 17 au latura lor incomensurabilă cu unitatea de măsură prin care s-a calculat aria lor!

— Vezi, fiindcă am revenit la Pitagora, mă gîndesc cu părere de rău că n-a rămas nimic scris de la Pitagora. Presupunem că a gîndit așa sau altfel, dar nu știu nimic sigur. Nici despre așa de mult trîmbițatul „cult al numerelor".

— Nu se știe pe ce cale au ajuns pitagoricienii la cultul numerelor, dar e sigur că ei aveau un cult al numerelor și mai ales față de numărul întreg. Aristotel menționează

adesea că Pitagora considera numărul ca *esența tuturor lucrurilor* și afirma că „toate lucrurile sînt numere". Pe această ipoteză se bazează întregul lor sistem filozofic idealist despre armonia universului. Kurt von Fritz, într-o foarte documentată lucrare despre posibilitatea descoperirii numerelor iraționale de către pitagoricieni, relevă că *diastema*, numirea dată de ei numărului fracționar, are și înțelesul literal de *interval* și deci arată posibilitatea de a se fi ajuns la numerele fracționare din cercetările cu privire la armonia muzicală.

— Nu-i chiar așa de concludent, căci și termenul *logos*, care înseamnă *cuvînt*, a fost folosit de greci cu înțelesul de raport. Știi, cred, că grecii foloseau expresia *logos* mai mult cu înțeles de *combinație de cuvinte care exprimă o părere sau o cunoștință despre ceva*, pe cînd *epos* însemna *cuvîntul vorbit* sau *care evocă o descriere a lucrurilor*.

— Da. Așa se explică de ce au preferat termenul *logos* ca să indice raportul dintre două numere. Folosind *logos*, ei au accentuat că raportul muzical exprimă numărul care definește natura intrinsecă a armoniei.

Dar ei considerau că armonia se poate exprima nu numai prin numerele care definesc raportul dintre intervalele diferitelor sunete, ci și prin figurile geometrice, care sînt tot numere ce exprimă raportul dintre lungimile laturilor care le determină forma. De pildă, ei spuneau despre două triunghiuri care sînt asemenea că au același *logos*: *ho autos logos*.

— Descoperirea incomensurabilității trebuie să fi produs o mare încurcătură în gîndirea pitagoricienilor, fiindcă distrugea credința că toate lucrurile se pot măsura prin numere întregi.

— Desigur. Se vede clar și din numirea dată acestor numere ciudate, *alogos*, deci fără posibilitatea de a fi exprimate prin *logos*, adică prin raportul dintre două numere întregi. Tradus în latinește, unde *ratio* corespunde lui *logos*, s-a ajuns la termenul *irrationalis*, „irațional", cum îi spunem noi.

Și, revenind la legenda lui Hippasus, cred că acum poți înțelege de ce s-a putut supăra Pitagora așa de tare pe el.

Vorbind despre dodecaedru, ceea ce este echivalent cu a vorbi despre incomensurabilitate, Hippasus a dat în vileag teribila descoperire care zdruncina din temelii însăși doctrina pitagoricienilor.

De fapt nici pentagrama și nici dodecaedrul n-au fost descoperite de Pitagora sau de vreunul dintre elevii lui. Pentagrama era un semn cunoscut cu mult înainte de către etrusci. Într-un studiu al lui Lindemann se arată o pentagramă desenată pe un vas găsit la Caera în Italia datînd din secolul al VII-lea sau al VI-lea î.e.n., așadar mai înainte de Pitagora. S-au găsit pentagrame și pe monedele vechilor gali, ceea ce relevă influența etruscă. Tot Lindemann identifică vreo 26 de dodecaedre de origine celtică sau etruscă, existente înainte de Pitagora și arată că în 1855 s-a descoperit lîngă Padua, pe muntele Lossa, un dodecaedru regulat de origine etruscă, probabil de prin anul 1 000 î.e.n. Ar fi foarte posibil ca tocmai existența pentagramei și a dodecaedrului în Italia pe vremea lui Pitagora să-i fi sugerat lui dorința de a le studia din punct de vedere geometric. E sigur că descoperirea proprietăților geometrice ale pentagramei și ale dodecaedrului se datoresc lui Pitagora și școlii sale. Aceste descoperiri sînt de fapt ceea ce prezintă interes, nu figurile în sine.

— După cîte știu eu, pentagrama, pe care am întîlnit-o și sub numele de *pentalfa*, a păstrat în tot cursul evului mediu o semnificare mistică. Prin secolul al XVI-lea, faimosul alchimist Paracelsus considera pentagrama ca un simbol al sănătății.

— Da, acest poligon apare foarte des în scrierile alchimiștilor din evul mediu. Se știe că în Germania pentagrama e numită chiar *Druidenfuss*, adică *piciorul vrăjitoarei*, și Goethe folosește această semnificație a pentagramei în prima convorbire dintre Mefisto și Faust. Ți-aduci aminte, cred, că la plecare Mefisto îi spune lui Faust:

„De-aici să pot ieși
Mă-mpiedică un semnuleț vrăjit:
Pe pragul tău e pentagrama".

Iar Faust îl întreabă ironic:

„Te temi de pentagramă?..."

— De ce vorbeşti de pentagramă ca aparţinînd numai evului mediu? Ne aparţine şi nouă. O găsim în stema ţării noastre şi o privim cu drag, considerînd-o, ca odinioară Paracelsus, un simbol de sănătate şi de prosperitate.

TEOREMA CELOR PATRU CULORI

SAU O PROBLEMĂ ÎN LEGĂTURĂ CU HĂRȚILE

Într-o după-amiază urcam înspre Copou cu prietenul meu Teodor Solonar, cînd prin fața Universității ne-a oprit un fost coleg de-al lui de liceu.

— Bine te-am găsit, dragă Todirel, îi spuse acesta cu o bucurie care țîșnea parcă din toată ființa lui. Ce faci? Unde stai și unde ai fost pînă acuma?

— Bine, Vasile. Stau în Cîmpulung Moldovenesc și am venit la prietenul meu pentru cîteva zile.

După prezentările și informațiile reciproce inerente unei atare întîlniri, Vasile Rotaru, care-și terminase tocmai atunci orele de curs la Facultatea de geografie, ne-a însoțit și el. Din vorbă-n vorbă discuția a ajuns și la *Atlasul național*, la care lucrează acum Institutul de geologie-geografie al Academiei. Ca specialist era entuziasmat de proiect. Fusese și el invitat să colaboreze și ne dădea multe amănunte interesante pe care le corela cu competență de realizările analoge din alte țări.

— Voi geografii, i-a spus Teodor Solonar, cînd, mulțumiți de cele aflate, aveam impresia că n-ar mai fi nimic de adăugat, ați sugerat matematicienilor o teoremă devenită celebră.

— Știu, a rîs încîntat peste măsură Vasile Rotaru. Este vorba de problema celor patru culori, care a devenit celebră prin zadarnicele străduințe ale matematicienilor de a o rezolva! Vorba ceea: un prost aruncă o piatră-n fîntînă și o sută de înțelepți n-o pot scoate! De altfel pot să-ți mărturisesc, așa ca între colegi, că în fundul sufletului meu am o mare satisfacție la gîndul că în această problemă noi geografii ne descurcăm de cine știe cîtă vreme cu ușurință și cu siguranță, în timp ce voi, matematicienii, n-ați

reușit să stabiliți o justificare a procedeului nostru. Ba mai mult, contra evidenței, ați ajuns să-i negați existența!

— Cele ce afirmi tu, dragă Vasile, sînt oleacă exagerate!

— De loc. Am citit eu singur această afirmație, scrisă de un matematician care a încercat demonstrația. „Nu știu nimic cu siguranță; numai că, dacă s-ar pune rămășag, aș paria că teorema lui Guthrie nu-i exactă". Spune dacă nu-i așa?

— Da, e așa, totuși susțin că lucrurile ar trebui puse la punct. Gîndindu-mă însă la anii petrecuți alături ea, nu-mi vine greu să ghicesc adevăratul motiv al tainicelor tale satisfacții sufletești. Sînt ca niște răzbunări tardive și indirecte pe toate notele încasate odinioară la matematici. Le întorci, micșorate încă, tuturor profesorilor de matematici și chiar tuturor matematicienilor!

— E adevărat! a recunoscut vesel colegul său, continuînd: Și nu-mi dai dreptate? Ce fel de matematicieni sînteți voi dacă nu puteți da în mai bine de 100 de ani o demonstrație matematică unui fapt așa de simplu că-l pricepe și un copil: „Cu patru culori se poate colora orice hartă fără ca două țări vecine să aibă aceeași culoare". Am colorat eu însumi așa zeci, ca să nu spun sute de hărți și există în lume sute de mii de hărți care nu contrazic acest procedeu! Nu văd de ce ar fi așa de complicat să se traducă aceasta în limbaj matematic?

— Nu e complicată traducerea în limbaj matematic, ci posibilitatea de a clasifica toate cazurile care s-ar putea prezenta și mai ales să se stabilească faptul că teorema e adevărată în *toate acele cazuri* care s-ar putea prezenta, adică în general. O sută de mii de cazuri particulare sau o sută de milioane nu înseamnă nimic atîta vreme cît nu se poate afirma că propoziția e adevărată pentru restul de cazuri, în număr poate tot așa de mare, dacă nu și mai mare, cazuri care nu s-au experimentat încă!

— De ce le-a venit matematicienilor să se apuce de această problemă? N-aveau ei destule cu ce se juca? am întrebat eu așa într-o doară.

— Vezi că nu matematicienii au descoperit-o, ci tot un geograf de-ai noștri le-a arătat-o, mi-a răspuns Vasile Ro-

taru, continuînd: Nu se știe bine cum a fost, fiindcă istoricul problemei s-a stabilit mai tîrziu pe bază de afirmații. Dar se pare că într-o zi, prin anul 1850, și cine știe dacă nu tot dintr-o discuție la fel de întîmplătoare ca și a noastră între doi prieteni, unul geograf de meserie și celălalt student în matematici la Edinburg, geograful l-a informat pe matematician că folosește cel mult patru culori ca să coloreze o hartă împărțită în regiuni fără ca două regiuni alăturate să aibă aceeași culoare. Cele aflate i-au plăcut tînărului matematician, pe nume Francisc Guthrie, și a cerut informații mai ample, însă geograful, al cărui nume nu s-a păstrat, n-a putut decît să-l încredințeze că acest procedeu e foarte răspîndit și aplicat pretutindeni din cauza economiei pe care-l prezintă. Răspunsul nu l-a putut mulțumi pe matematician. În mintea lui, *teorema celor patru culori* se și formulase: „Patru culori sînt suficiente ca să se coloreze harta unei țări împărțită în regiuni sau a unui continent împărțit în țări fără ca două domenii alăturate să aibă aceeași culoare", iar el și-a propus s-o demonstreze. Numai că demonstrația nu se lăsa descoperită nici într-o zi, nici într-o săptămînă, nici într-o lună și bietul băiat începuse a tînji după ea. S-a întîmplat atunci să vină în vizită la el fratele său mai tînăr, care studia chimia la Londra și, aflînd de necazul ce-l muncea, a dus problema la profesorul lui de matematici, August de Morgan, pentru care avea o deosebită admirație, și i-a cerut ajutor. În fine, ca să nu mai lungesc vorba, nici de Morgan n-a putut găsi demonstrația satisfăcătoare și, la rîndul lui, a arătat-o altora, așa că, în cîțiva ani problema celor patru culori a ajuns la modă printre matematicienii din Anglia. Toți vorbeau de ea, dar nimeni nu publica nimic! Mocnea ca un foc ascuns, dar și cînd a izbucnit pălălaie a pîrlit toată matematica, nu alta! În prima comunicare despre colorarea hărților făcută de un matematician la Societatea regală de geografie din Londra, acesta a afirmat sus și tare că n-a putut găsi o demonstrație la teorema celor patru culori!

— Cum se poate una ca asta? De obicei, într-o comunicare, se arată ce s-a realizat!

— Ei vezi, tocmai de aceea am spus eu că mirosea a pîrlit!

— Dar trebuie să-ți atrag atenția că lucrurile nu-s chiar așa, dragă Vasile. Nu contest însă că pentru plimbarea noastră, versiunea ta e binevenită, că doar nu ne-om apuca să discutăm serios pe-ntuneric și printre cărările parcului de la Expoziție[1].

— Așa-i, măi Toader, l-am aprobat eu. Însă îmi pare că problema asta are pe vino-ncoace. Sînt curios și eu, ca studentul acela din Edinburg și zău că mi-ar face plăcere s-o cunosc mai îndeaproape!

— În privința asta nici eu nu m-aș da în lături, a adăugat Vasile Rotaru. Drept să vă spun, n-am reținut din ea decît numai cronica faptului divers, fiindcă prezența formulelor cînd citeam așa de unul singur îmi strica tot cheful! Dar dacă Teodor s-ar încumeta să ne expună el problema, chiar cu formule, dar așa ca să le pricep și eu — în liceu era renumit pentru acest talent — , atunci m-aș prinde cu drag în horă alături de dv.

— Prea multe nu știu nici eu, a răspuns Teodor Solonar, dar, atîta cît mă pricep, am s-o fac bucuros. Și fiindcă cu tine, Vasile, nu am ciocnit de mult un păhărel de vin, vă invit pe amîndoi mîine seară să cinăm împreună la „Moldova"[2]. Fiind sîmbătă, a doua zi sînteți liberi și deci nu aveți cum spune „nu". Am să aduc cu mine creion, hîrtie și poate că acolo, cu un cîntecel și o fripturică stropită din cînd în cînd și nu prea rar cu un pahar de vin, se va colora în roz și teorema celor patru culori.

Teodor Solonar s-a ținut de cuvînt. După ce ospătarul a strîns farfuriile și a avut grijă să umple paharele, el a pus pe fața de masă curățită cu grijă cîteva coli de hîrtie și un creion nou-nouț în patru culori. Nici n-a visat cînd l-am cumpărat, mi-a spus privindu-l, cîtă onoare îi voi face!

— Nici eu nu bănuiam că ne vom abate de la programul pe care l-am fixat, i-am răspuns eu! Trebuie să-i mulțumesc d-lui Rotaru pentru această surpriză.

---

[1] Parc din Iași.

[2] Restaurant din Iași.

— Nu te grăbi cu mulțumirile. Lasă să vezi dacă va fi nevoie, a intervenit prietenul meu. Aflați că azi-dimineață m-am dus anume la Seminarul matematic ca să citesc articolul acela cu pricina.

— Cum l-ai găsit? Știai autorul?

— Desigur, se află în volumul al XI-lea al *Operelor complete* ale lui Arthur Cayley.

— Cum ai spus? am tresărit eu. Unsprezece volume de lucrări ale unui singur matematician? Doar aici nu-i vorba de literatură! Fiecare pagină poate cuprinde o problemă sau atîtea calcule...

— Dar te înșeli. Nu-s unsprezece de toate, ci treisprezece volume format mare, de vreo 600 de pagini fiecare! Articolul acesta, deși are numai două pagini, poartă pecetea unui matematician de geniu prin stilul simplu și prin limpezimea cu care e prezentată problema. Are ca titlu *Despre colorarea hărților* și a fost publicat în 1879. Înainte de a ne ocupa de acest articol țin să precizez că tot Cayley, pe atunci profesor de matematici la Universitatea din Cambridge, a atras atenția asupra problemei cu un an mai înainte, punînd la Societatea matematică din Londra întrebarea: „Există vreo demonstrație a afirmației că sînt necesare patru culori distincte pentru a colora o țară împărțită în regiuni așa fel ca două regiuni vecine să nu fie colorate la fel?" Răspunsul a fost negativ și de aceea, probabil, peste un an a făcut o comunicare la Societatea regală de geografie, care începe așa: „Teorema că patru culori sînt suficiente pentru orice hartă a fost menționată undeva de prof. de Morgan și el se referea la ea ca la o teoremă binecunoscută de cartografi. Ca să punem problema într-o formă precisă, să considerăm că domeniul este simplu conex, adică are ca margine o curbă". De aici înainte să lăsăm deoparte articolul lui Cayley ca să lămurim termenul folosit aici.

— Atunci desenează-ne un domeniu mărginit de o curbă dare se numește simplu conex și arată-ne cum se deosebește ce un altul care nu-i simplu conex.

— Iată harta regiunii Iași și a vecinătăților sale (fig. 51). Închipuiți-vă că domeniul ar fi un ocean cu mai multe

insule înăuntrul lui. Acest domeniu (fig. 52) nu ar mai fi simplu conex, căci n-ar fi mărginit numai de curbe care înfățișează malul oceanului, ci de toate curbele care ar contura fiecare insulă în parte. Dar noi discutăm deocamdată cazul unor regiuni cu hotarul format dintr-o singură curbă (fig. 51). Fiind vorba de un aglomerat de mai multe regiuni separate prin hotare proprii, urmează că cel mai simplu mijloc de a le deosebi pe acestea între ele este să le colorăm în culori diferite.

— Nu toate cu culori diferite, ci numai regiunile limitrofe, căci acelea care nu au hotare comune se pot colora cu aceeași culoare.

— Vasile are dreptate. Și această observație a lui ne conduce la problema configurației, a țesăturii unei hărți, problema colorării fiind strîns legată de aspectul pe care-l poate lua ea datorită modului de distribuție a liniilor de demarcație care formează hotarele diferitelor ei regiuni. De aceea propun să lăsăm deocamdată la o parte problema colorării unei hărți, ca să discutăm mai întîi despre împărțirea unui domeniu plan în regiuni. Să observăm că o dreaptă (D) împarte o suprafață plană nelimitată în două regiuni, în așa fel că, dacă două puncte A și B (fig. 53) sînt situate de o parte și de alta a dreptei, ele nu pot fi unite printr-o linie care să nu taie dreapta (D). Mai multe drepte paralele, fie a numărul lor, împart planul în $(a + 1)$ regiuni și, dacă pe acestea le tăiem printr-o transversală...

— Bine, e clar că atunci se formează de două ori mai multe regiuni, adică $2\ (a + 1)$, am spus eu. Dacă aș duce și alte paralele la această transversală, în număr de b, atunci planul se împarte în $(a + 1)\ (b + 1)$ regiuni.

— Fiindcă ați vorbit despre această împărțire a planului, aș adăuga că în acest caz sînt de ajuns numai două culori pentru a colora planul. Noi numim o asemenea hartă *bicromă* și, dacă Teodor îmi împrumută creionul lui cel nou, m-aș juca să colorez acest desen!

— Poftim, fă-ți datoria, stimate coleg, dar să fac întîi și un contur, ca să ne prezinți cu adevărat o hartă bicromă (fig. 54).

În acest timp, ca să nu stăm degeaba, noi ne vom strădui să golim cîte un pahar de vin monocrom.

— A, nu! La această treabă mă grăbesc să iau parte și eu! Iar ca să vă încredințez că rămîn om de treabă, am să vă arăt și alt gen de hartă ce se poate colora tot numai cu două culori. Iat-o (fig. 55).

— N-am nimic contra, dar te rog să-mi colorezi tot cu două culori și harta aceasta (fig. 56), care seamănă cu a ta.

— Seamănă, dar nu răsare! Aici trebuie trei culori.

— Adică, după expresia dv., avem de-a face cu o hartă *tricromă?*

— Da. Sau cu o hartă care are *numărul cromatic trei*, căci așa se numește numărul minim de culori cu care se poate colora o hartă.

— Atunci Teodor vrea să ne demonstreze că orice hartă este *tetracromă?*

— Vreau? Nici vorbă să vreau așa ceva! Vreau numai *să încerc* să vă arăt *cum s-a încercat* să se stabilească aceasta, dar tare mă tem că dacă vom continua în acest tempo ne dă ospătarul afară cînd va închide restaurantul, fără să fi ajuns prea departe!

— Nu se știe. E în funcție de licoarea monocromă din pahare! Ca să vezi că am priceput și eu ceva, am să-ți arăt de ce harta ta e tricromă, am spus eu. Figura desenată adineauri de Vasile nu era decît o repetare a figurii 2 în care planul fusese împărțit în două regiuni și deci ea putea fi colorată cu două culori. Făcînd să treacă mai multe drepte prin același punct, planul se împarte tot într-un număr-pereche de regiuni, așa că rămîn suficiente cele două culori care colorează alternativ aceste regiuni. În cazul ultim însă, numărul regiunilor este nepereche și alternanța conduce la două regiuni alăturate *de aceeași culoare*.

— Așadar, putem trage de aici următoarea concluzie: dacă două regiuni au un hotar sau o linie de demarcație comună, ádică sînt limitrofe, după cum a spus Vasile, ele trebuie colorate diferit. Iar dacă două regiuni au unul sau mai multe puncte comune, atunci ele nu-s limitrofe și se pot colora cu o singură culoare.

— Că se pot colora cu aceeași culoare cînd au un punct comun sînt de acord. O văd în figurile desenate aici. Dar cum vine ca două regiuni să aibă mai multe puncte comune și să nu fie limitrofe? Prin două puncte nu trece oare o dreaptă?

— Eu, ca matematician, sînt de acord cu tine, dar să vedem ce spune geograful nostru Vasile.

— Nu spun nimic. Am să-i desenez două regiuni care au două puncte comune și nu-s limitrofe. Uite aici, regiunile A și B care sînt despărțite de regiunea C (fig. 57). Nu se pot colora la fel fără să se producă vreo confuzie, deși au trei puncte comune?

— Așa-i. Am înțeles.

— Acum a venit timpul să desenez două figuri din articolul lui Cayley, a spus Teodor Solonar. În figura aceasta (fig. 58), domeniul este împărțit în trei regiuni aidoma unor sectoare de cerc care au un punct comun și apoi două cîte două o linie comună. La aceasta se adaugă o coroană avînd hotar comun cu fiecare dintre cele trei regiuni. E evident că pentru a colora această hartă sînt necesare patru culori diferite. În figura de aici însă (fig. 59), deși numărul sectoarelor interioare este patru, adică mai mare, acest număr fiind pereche, după cum ne-a arătat geograful nostru, sînt de ajuns două culori spre a le deosebi. Folosind alta pentru inelul exterior, rezultă că harta se colorează numai cu trei culori.

— Uite o variantă a acestor figuri, pe care le-am obținut punînd coroana în interior și sectoarele în exterior, am spus arătîndu-le desenele mele (fig. 60).

— Ai dreptate. Ele dovedesc același lucru. Aceste figuri le folosește Cayley ca să prezinte teorema, pe care o enunță astfel: „Dacă o arie este împărțită în orice fel în alte arii, acestea pot fi colorate numai cu patru culori, în așa fel ca două arii care se ating să aibă culori deosebite. Ariile cu punct comun pot avea aceeași culoare". După cum vedeți, el spune *arii* în loc de *regiuni*. Prin cele două desene el a arătat că numărul de patru culori este necesar. Și acum ajungem la *afumătura* voastră de aseară. Iată ce spune autorul: „În toate cazurile cunoscute se poate vedea că

patru culori sînt și suficiente. Dar n-am găsit o demonstrație generală și este important să explic în ce constă dificultatea. Să considerăm un sistem de n arii colorate după teoremă numai cu patru culori. Dacă adăugăm a (n+1)-a arie, nu urmează numaidecît că o putem colora tot cu aceste culori fără să alterăm colorația originală. De pildă, dacă colorația originală ar fi așa ca toate cele patru culori să fie prezente pe marginea exterioară a celor n arii și cea de-a $(n + 1)$-a arie să le înconjoare pe cele n, atunci n-ar mai fi posibil să rămînă o culoare pentru ea".

— Să știi că scrie foarte frumos. Poate că-i de vină și cîntecul pe care-l ascult acum sau întreaga atmosferă de aici... nu știu, dar parcă m-a mișcat povestea asta pînă la înduioșare. Drept să-ți spun că nu citisem și nici n-avusesem curiozitatea să citesc acest articol. Bucuros de tovărășia voastră, văd că am zburdat ieri mai mult decît trebuia. Îmi pare rău de vorbele mele de aseară, dar îmi pare și bine că n-am glumit despre Cayley și cu alții.

— Așa de repede și-a făcut efectul licoarea monocromatică, bădie Vasile? l-a întrebat Teodor Solonar, ștergîndu-și abureala de pe ochelari.

— Din cele ce ne-ai citat înțeleg că, arătînd greutățile care se prezintă în demonstrarea teoremei, Cayley deschide drumul și invită pe matematicieni să caute o demonstrație a ei. Probabil că rezultatele n-au întîrziat mult ca să se arate.

— O, nu! Aș putea spune că acest articol a avut darul să trezească un mare interes față de această problemă și multe simpatii trainice, de pildă una care a durat timp de 60 de ani.

— Vrei să spui că un matematician a publicat timp de 60 de ani articole în legătură cu demonstrarea teoremei celor patru culori?

— Întocmai și fără să fi ajuns la capăt!

— Ce-o fi avut de spus dacă n-a putut să-i dea de capăt?

— Problema poate fi atacată pe mai multe căi și se poate ajunge la rezultate interesante chiar dacă demonstrația nu a reușit. De pildă, mulți matematicieni au pornit de la colo-

rarea poliedrelor convexe, căutînd o demonstrație bazată pe rezultatele stabilite în acest caz.

— Acum îmi explic de ce întîlneam eu numirile de *muchii* și de *vîrfuri* cînd era vorba de hărți, a spus Vasile Rotaru, încîntat de descoperire. Ele au fost sugerate de compararea regiunilor unei hărți cu fețele unui poliedru.

— Ca discuția să fie mai limpede, ne-a spus Teodor Solonar scoțind din buzunar trei bucăți de plastilină și dîndu-ne fiecăruia cîte o bucată, tu, Vasile, să-mi faci un cub, iar tu un tetraedru. Eu am să încerc să închipuiesc un octaedru și, poate, un dodecaedru.

— Cîte culori ți-ar fi de ajuns ca să colorezi acest octaedru? m-a întrebat prietenul meu cînd a văzut că am pus tetraedrul pe masă.

Privindu-l, i-am răspuns:

— Două, fiindcă sînt patru triunghiuri deasupra și patru dedesubt (fig. 61). Acest corp corespunde exact cu figura 55, în care două culori puteau alterna fără să se întîlnească.

— Rezultă că octaedrul poate fi considerat ca un model de hartă bicromă.

— La cubul meu nu ajung două culori, a observat Vasile Rotaru așezîndu-l pe masă. Am nevoie de trei culori ca să-i deosebesc fețele (fig. 62). Este deci modelul hărții tricrome.

— Sînt și alte poliedre convexe cu fețe triunghiulare, ca de pildă icosaedrul, care pot fi luate ca model de hărți tricrome. Însă tetraedrul nu! El are patru fețe triunghiulare, fiecare adiacentă cu celelalte trei, așa că sînt necesare patru culori ca să fie colorat. La fel și dodecaedrul. Să-l considerăm model de hartă tetracromă. Și fiindcă avem aici pe masă aceste poliedre convexe, hai să mai stabilim și o teoremă celebră, descoperită de Descartes și redescoperită de Euler.

— Descartes? Euler? Cum? Acum și aici ți-ai găsit să vorbești despre descoperirile lor?

— De ce nu? Un gînd frumos e binevenit oricînd și oriunde. Mai ales cînd este ușor de priceput. Te-ai speriat înainte de a afla despre ce-i vorba! Există o formulă care leagă între ele numărul muchiilor, al vîrfurilor și al fețelor unui poliedru convex oarecare.

— Imposibil! Cum? Vrei să-mi spui că un tetraedru cu patru fețe și un poliedru cu 2 000 de fețe pot asculta de aceeași lege de distribuție?

— Da. N-ai decît să te încredințezi privind deocamdată la poliedrele convexe de pe masă. Uită-te:

— *la tetraedru*: 4 fețe + 4 vîrfuri = 8 = 6 muchii + 2 = = 8,

— *la cub*: 6 fețe + 8 vîrfuri = 14 = 12 muchii + 2 = = 14.

Acum ascultați cît de simplu se poate formula această lege în general: „În toate poliedrele convexe, numărul fețelor plus cel al vîrfurilor este egal cu numărul muchiilor mărit cu doi". Ca să-i dăm o haină matematică, să notăm numărul fețelor cu F, al vîrfurilor cu V și al muchiilor cu M. Avem, oricare ar fi poliedrul convex,

$$F + V = M + 2.$$

— Extraordinar! Știi de cîte ori am întîlnit eu această formulă? Dar am trecut peste ea închipuindu-mi că mi-ar fi imposibil s-o descurc de unul singur! Și cînd colo!? Te pomenești că e și simplu de demonstrat? a întrebat colegul prietenului meu.

— Altfel aș fi adus vorba tocmai aici și acum?

— Atunci spune-ne și nouă cum s-a ajuns la ea; să vedem ce vom pricepe!

— Nici nu mă gîndesc să v-o spun, căci răspunsul îl aștept de la voi. Cel mult am să vă conduc într-acolo. Din exemplele pe care le-ați avut, să presupunem că formula e adevărată oricît de mare ar fi numărul n al fețelor.

— Vrei să folosești metoda inducției, adică să admiți formula adevărată pentru n fețe și să stabilești că ea rămîne adevărată și dacă numărul fețelor crește cu una, am observat eu, bucuros ca un elev.

— Întocmai! Acum spuneți-mi cum se poate obține dintr-un poliedru convex dat un altul tot convex, dar cu o față mai mult? Priviți cubul sau octogonul și gîndiți-vă.

— Tai un vîrf și în locul lui se formează o față, am spus eu.

— Perfect. Deci numărul fețelor a crescut cu unu. Cum numărăm muchiile și vîrfurile care s-au format? Hai, spune și tu, măi Vasile!

— Aceasta depinde de numărul fețelor ce se întîlnesc într-un vîrf. Dacă sînt trei, ca aici, s-au format trei vîrfuri și trei muchii.

— Atunci fă socoteala și vezi ce s-a adăugat într-o parte și în cealaltă la formula $F + V = M + 2$.

— În stînga o față plus trei vîrfuri fac patru, din care se scade vîrful tăiat, rămînînd 3, și dincolo în dreapta sînt de adăugat trei muchii. Așadar, egalitatea se verifică. Nu-i greu să prevăd că formula rămîne valabilă chiar dacă numărul fețelor ce se întîlnesc într-un vîrf ar fi altul în afară de trei, căci numărul vîrfurilor rămîne mereu egal cu al muchiilor, iar fața adăugată se compensează cu vîrful tăiat.

— Acum să vedem cum s-ar formula această teoremă dacă în locul unui poliedru convex ar fi o suprafață poliedrală convexă, vreau să spun o suprafață deschisă și nu închisă cum e poliedrul.

— Nu s-ar putea obține scoțînd o față din poliedrul convex?

— Ba da!

— Atunci ce mare filozofie? a răspuns tot Vasile Rotaru. Dacă îmi închipui un poliedru de carton și tai cu lama de-a lungul muchiilor o față, numărul muchiilor și al vîrfurilor rămîne același, numai cel al fețelor se micșorează cu unu. Așadar, în acest caz avem

$$F + V = M + 1,$$

căci din partea dreaptă lipsește o față.

— Ei, ați văzut că puteți gîndi și voi ca Descartes și Euler? Ba încă cu muzică și cu un pahar de vin în față, ne-a încurajat ghidul nostru.

— Bine, am făcut-o noi, dar cred că asta a fost așa, numai de amorul artei, căci nu văd la ce ne-ar putea folosi această teoremă?

— Iată cum se trăiește istoria, dragă Vasile! Observația ta ne-a întors într-o clipă pe vremea lui Euclid, adică numai

cu vreo 2200 de ani în urmă, a răspuns Teodor Solonar tărăgănat, zîmbind ironic.

— Adică de ce? a întrebat Vasile cu duritate.

— Nu bănuiești, domnule Rotaru? m-am amestecat eu, grăbit să aplanez conflictul ce părea că se dezlănțuie. Prietenul nostru, care are slăbiciunea anecdotelor, pîndea o ocazie ca să ne poată plasa una; lăsați-l să-și descarce sufletul!

— Dacă-i așa, mă rog, spune-ne anecdota cu Euclid!

— Nu mai spun nimic! Intervenția asta a răsuflat-o! a zis cel solicitat. Ți-aduci aminte, Vasile, că noi ne-am mai bătut odată tot pentru că ți-am spus o poveste?

— Parcă! Dar e atît de mult de-atunci... eram copii!

— Da, acum sîntem bătrîni... Însă, dacă ne întoarcem la teorema lui Descartes, să știi că ea joacă un rol de seamă în demonstrațiile care au fost încercate pentru a lămuri natura teoremei celor patru culori, tocmai prin analogia ce s-a putut stabili între o hartă plană sau sferică și un poliedru. Primul care folosește această idee pentru a demonstra teorema celor patru culori a fost Alfred Bray Kempe. Era avocat pledant din Londra, dar totodată și un pasionat matematician, studiind matematicile la Cambridge, unde era profesor A. Cayley. El își publică demonstrația, sub titlul *Despre problema geografică a celor patru culori*, în 1879, adică la un an după comunicarea lui Cayley. Desigur că acest studiu a fost făcut sub influența și chiar sub îndrumarea lui Cayley. O bănuiesc nu numai pentru că el citează lucrările lui Cayley și îl consideră pe de Morgan ca primul matematician care ar fi pus problema, ci și pentru că această lucrare a fost tipărită în revista editată de Universitatea din Baltimore, „American Journal of Mathematics". Or, această revistă își începea apariția numai cu un an înainte și era condusă de profesorul James Sylvester, prieten bun cu Arthur Cayley.

— Dar cum s-a putut lega o prietenie între acești doi oameni dacă unul era la Londra și celălalt în Statele Unite ale Americii?

— Fiindcă Sylvester s-a născut și a trăit cea mai mare parte a vieții lui în Anglia. La 14 ani audia cursul de matematici pe care-l ținea de Morgan la Universitatea din Londra.

— Atunci s-au cunoscut ca studenți? Au fost poate colegi de Universitate?

— Nu. Sylvester era cu 7 ani mai bătrîn decît Cayley. S-au cunoscut mult mai tîrziu, pe cînd profesau amîndoi avocatura și s-au simțit atrași unul de celălalt prin pasiunea lor comună pentru matematici.

— Nostim de tot! Va să zică și matematicianul Cayley a fost avocat ca Kempe și ca Sylvester? Dar cum au ajuns acești doi matematicieni de seamă să se facă avocați sau, invers, cum s-au transformat din avocați în matematicieni celebri? Nu înțeleg cînd a putut să scrie Cayley atîtea volume de matematică dacă a făcut și avocatură?

— Dar cu teorema ce facem? O lăsăm baltă?

— Lasă că-i vine și ei rîndul. Acum continuă povestea lui Sylvester și Cayley... Așadar, Sylvester a urmat matematicile la Universitatea din Londra?

— Nu. Acolo le-a început, dar pe urmă a trecut la Institutul regal din Liverpool. Chiar la sfîrșitul primului an, apreciindu-i-se talentul, profesorii îl trec într-o clasă specială de matematici. În același an el rezolvă o problemă ce-i fusese trimisă de o societate de asigurări din America.

— Cum adică, devenise așa de celebru că i se dusese vestea pînă acolo?

— Nu tocmai, dar avea un frate care emigrase mai de mult în America și lucra la o societate de asigurare și loterie. O dată directorul său l-a consultat într-o problemă din teoria combinărilor a cărei soluție interesa îndeaproape Societatea la care lucra. Neputînd s-o rezolve, el a propus directorului s-o trimită fratelui său James. Și într-adevăr James rezolvă problema așa de frumos, că primește ca premiu din partea Societății 500 de dolari, care-i prind foarte bine, deoarece era sărac. Acest succes și bogata lui activitate științifică fac ca la 24 de ani să fie numit profesor de filozofie a naturii la Universitatea din Londra, unde profesa pe atunci și de Morgan. În anul următor, deși foarte tînăr, el este ales membru al *Societății regale*.

— Bine, dar totul prevestește o carieră matematică foarte strălucitoare. Ce rost mai are povestea cu avocatura? am sărit amîndoi deodată.

— Stați că n-am terminat. Ați auzit vreodată proverbul acesta: „Măgarului, cînd îi merge bine, se duce să se dea pe gheață"?

— Și, neștiind să patineze, își rupe picioarele?

— Proverbul n-o mai spune, ci lasă să se înțeleagă. Cam așa a făcut Sylvester, deși e ușor să judeci faptele cînd cunoști urmările, dar nu și ce le-au putut determina! Cine știe de ce părăsește el Londra și pleacă în America? Aici se angajează ca profesor de matematici la Universitatea din Virginia. Trei luni mai tîrziu are un conflict cu un profesor mai tînăr care-l insultă și el cere universității să-l pedepsească.Fiindcă aceasta refuză să-i dea satisfacție, el demisionează și, după ce stă fără post mai bine de un an, decide să se întoarcă în Anglia, Aici nu mai încearcă să intre în învățămînt. Timp de 10 ani ocupă un post modest într-o societate de asigurare pe viață, dă lecții particulare de matematici și se pregătește pentru cariera de avocat. La 36 de ani a intrat în barou.

— Trebuie să fi fost iute din fire, dar totodată activ și răzbătător.

— Da. Din întreaga lui făptură se desprinde un aer de vitalitate, de îndrăzneală și de forță. La înfățișare era scurt, îndesat și avea un cap foarte frumos. Un elev de-al lui, mai tîrziu și el matematician, spunea despre el că era nerăbdător și se înfierbînta repede, dar era generos, caritabil și sincer. La cea mai mică provocare sărea la harță, dar nu păstra ură și uita repede totul.

Cayley, din contra, avea un aer timid, era rezervat, rece și părea tare plăpînd. Ca și la Sylvester, geniul lui s-a manifestat de timpuriu, fiind remarcat de profesori, care l-au sfătuit să urmeze matematicile. Însă la început s-a opus familia, fiindcă tatăl lui dorea să-l facă negustor. Mai tîrziu însă, la 18 ani, i s-a permis să urmeze matematicile și a studiat la Cambridge. Nu avea altă pasiune decît matematicile și literatura, în special romanele. Walter Scott fusese primul lui idol; după aceea a urmat Shakespeare. La 21 de ani reușește primul atît la examenul de matematici, cît și la un concurs considerat ca foarte pretențios.

— Curios! Condiții aproape asemănătoare cu acelea prin care a trecut și Sylvester în tinerețe.

— Aproape sau, mai bine zis, aparent asemănătoare, căci nu trebuie să uităm firea lor deosebită. Cayley avea o viață sufletească liniștită, calmă, lipsită de frămîntările și de zbuciumul care se dezlănțuie într-un suflet chinuit de patimi. Pe Cayley îl delectau comediile lui Shakespeare, dar nu-i plăcea, de pildă, Thackeray, iar pe Dickens nu l-a putut citi nicicînd. Sylvester, din contra, se frămînta citind cu pasiune clasici greci și latini, trăind tragedia fiecărui erou și suferind amarnic pentru orice gest sau cuvînt care-i părea neprietenos. Însă, așa cum ați observat, asemănarea condițiilor exterioare continuă. Cayley a fost numit repetitor pe timp de trei ani la Trinity College. Aici și-a petrecut tot timpul lui liber, făcînd descoperiri matematice și publicînd unul după altul multe și interesante lucrări. Vacanțele făcea excursii prin munți sau vizita Europa. Fiind în Italia, s-a îndrăgostit de pictură și de arhitectură așa de tare, că aceste două arte l-au delectat apoi toată viața, mai ales că avea un talent remarcabil în special pentru acuarelă. Și, totuși, la capătul acestor trei ani iată-l și pe Cayley că părăsește Cambridge, deși nu i se oferea altundeva vreun post de profesor. Aceasta îl decide să se prepare timp de trei ani ca să intre în barou. Astfel la 28 de ani devine avocat. Sylvester va intra și el în barou în anul următor, și așa acești doi mari matematicieni s-au întîlnit în profesarea unei cariere care nu-i interesa nici pe unul, nici pe altul! Cu firea lui entuziastă și sociabilă, Sylvester s-a simțit puternic atras de dl. Cayley, „care în mod obișnuit nu pune în vorbirea sa decît perle și rubine". În acest stil figurat, Sylvester face aluzie la problemele de matematici pe care le-a discutat cu Cayley. Nu trece nici un an de la întîlnirea lor și iată că Sylvester începe să publice din nou memorii matematice după vreo 11 ani de întrerupere, spre deosebire de Cayley, care, deși a schimbat cariera, nu și-a întrerupt activitatea matematică. O recunoaște de altfel Sylvester singur, fiindcă în primul lui memoriu scrie: „Această teoremă mi-a fost, în parte, sugerată în cursul unei convorbiri cu dl. Cayley, datorită căruia am regăsit bucuriile vieții de matematician". Același

lucru îl va mărturisi și mult mai tîrziu, cînd devine profesor de matematici la Oxford: „Deși mai tînăr ca mine, el a fost tatăl meu spiritual. El e primul care mi-a deschis ochii și a înlăturat de pe ei vălul, așa ca ei să poată vedea și primi înaltele mistere ale credinței noastre comune în matematici". Dar destul cu poveștile! V-aș propune acum, cît încă nu ne apasă prea tare fumul din jurul nostru și nici nu s-a îngroșat ceața de pe ochi, să ajungem la înaltele mistere ale teoremei celor patru culori!

— Fie voia ta! Pot să-ți amintesc că am ajuns la Sylvester, despre care, fără să ne mai spui tu, bănuim că a mai plecat o dată în America, să devină profesor de matematici la Baltimore și că apoi s-a întors iar în Anglia, ca să fie profesor și la Oxford, de unde va scrie cele ce a scris despre Cayley, pornind de la articolul lui Kempe, de meserie avocat, dar matematician de plăcere, care publică prima demonstrație a teoremei celor patru culori.

— Într-adevăr. Demonstrația pe care a dat-o Kempe a încîntat pe toată lumea. Părea desăvîrșită nu numai prin logică, ci mai ales prin eleganța cu care Kempe a știut să se folosească de formula lui Descartes ca să stabilească suficiența a patru culori pentru colorarea unei hărți.

— Stai, că prea ai luat-o razna! Aș vrea să știu cum și în ce fel se poate stabili o corespondență între un poliedru — figură în spațiu mărginită de fețe plane, limitate la rîndul lor de drepte — și o hartă, figură desenată pe un plan sau, să zicem, pe o sferă ale cărei regiuni sînt mărginite de felurite linii curbe? Ai mai făcut o dată aluzie la aceasta, dar atunci am luat-o într-un sens figurat. Chiar dacă aș considera o suprafață poliedrică și nu un poliedru închis, tot nu o pot așeza pe un plan fără să deformez în chip monstruos forma poligoanelor care o limitează! Doar nu vrei să-mi spui că raționamentul matematic nu suferă dacă în locul unei drepte aș considera o curbă? În acest caz te-aș întreba dacă privești cu aceiași ochi un om care trece pe stradă cu pasul liniștit pe drumul cel mai scurt, adică în linie dreaptă, și pe unul care merge pe două cărări, așa cum mă tem că vom face-o și noi în noaptea asta cînd ne vom îndrepta spre casă.

— Ba cîteodată pe matematicieni nu-i stinghereşte conturul unei figuri. Anume, cînd se studiază proprietăţile geometrice *de situaţie*, adică acelea care nu se schimbă dacă se deformează figura în mod continuu, fără s-o rupi sau să lipeşti la un loc părţi ce erau separate; în acest caz forma figurii nu are nici o importanţă. Cu studiul acestor configuraţii, şi aici îşi are locul şi teorema colorării hărţilor, se ocupă *topologia*, căreia i se mai zice şi *Analysis situs* şi pe care un matematician cu simţul umorului a numit-o *geometria beţivului*!

— Prin urmare, am nimerit-o fără să ştiu, a rîs Vasile Rotaru. Acum înţeleg şi de ce ne-ai adus aici la crîşmă!

— Desigur, am ales cadrul potrivit problemei! Aşa că hai noroc! şi lăsaţi-mă să vă spun o dată ce am de spus!

— Dar pînă acum ce-ai făcut? Ai tăcut? Oricum, de aici înainte te sfătuim să fii mai atent la deformări! Atîta vreme cît nu ştiam în ce fel de matematică aveai de gînd să ne afunzi, hai, treacă-meargă...

— Orice-ar fi, cred că sînteţi de acord cu mine că problema colorării nu depinde de forma marginilor unei regiuni, fie ele linii drepte, arce de cerc sau mai ştiu eu ce fel de curbe! Şi, dacă-i aşa, iată gata stabilită corespondenţa poliedru-hartă. Dacă luăm, de pildă, dodecaedrul şi ne închipuim că-i desprindem o faţă ca să devină o suprafaţă poliedrală deschisă, te rog pe tine, Vasile, cearcă de o deformează în mod continuu ca să o poţi aşterne pe hîrtie. În felul acesta sînteţi de acord că problema colorării lui nu va suferi nici un fel de modificare, da?

— Cred şi eu! De altfel am întîlnit undeva, nu mai ştiu unde şi cînd, ceva de acest gen. Uită-te aici: fac întîi pentagonul din mijloc (fig. 63) şi îl înconjur cu alte cinci pentagoane, apoi lărgesc celelalte cinci şi le desenez ca un brîu în jurul pămîntului. Ca să-ţi fac plăcere, înconjur pentagoanele cu linii curbe în loc de drepte! Acuma dă-mi creionul tău cel nou ca să le colorez! Să zicem că pun la mijloc roşu. Atunci primul brîu, format din 5 pentagoane, adică dintr-un număr impar de regiuni, cere 3 culori, fie ele verde, albastru şi alb. Pentru pentagoanele din exterior am nevoie

tot de 3 culori, dar pot folosi iarăși culoarea roșie și deci pun roșu, verde, roșu-verde și albastru. Ei?

Cred că această performanță v-a încredințat pe amîndoi că din punct de vedere topologic un poliedru convex este identic cu o hartă plană sau sferică. Se cuvine deci să stabilim și o nouă terminologie. Vom numi *muchie* orice curbă continuă și deschisă care unește două puncte de pe o suprafață sferică sau plană, iar punctelor de pe ea le vom spune *vîrfuri*. Să presupunem că pe suprafața considerată se găsesc un număr finit V de vîrfuri. Unindu-le două cîte două într-un anumit mod, oricare ar fi el, prin M muchii, se determină pe suprafață o *rețea* sau un *graf*. Această *rețea* este *conexă* dacă fiecare vîrf aparține unei muchii și orice muchie este legată de muchiile vecine ei, astfel ca nici o muchie să nu aibă unul sau ambele vîrfuri libere. O *rețea conexă* împarte suprafața într-un număr finit F de regiuni sau *fețe*, fiecare față fiind separată de o alta printr-o muchie care leagă două vîrfuri. Două fețe se numesc *alăturate* dacă au cel puțin o muchie comună. Se mai spune că configurația compusă din fețe, muchii și vîrfuri este o hartă geografică sferică sau un poliedru de gen zero. Așa fiind, rezultă că teorema lui Descartes aparține topologiei, căci ea rămîne valabilă dacă muchiile sînt drepte sau curbe, dacă fețele sînt plane, sferice sau de orice alt gen obținut printr-o deformare continuă a planului. Pentru orice hartă sferică sau poliedru convex avem

$$F + V = M + 2,$$

iar pentru o hartă plană sau o suprafață poliedrală convexă

$$F + V = M + 1.$$

— Ai dreptate. Prin urmare, orice formulă care exprimă o relație numerică între numărul fețelor *(F)*, al vîrfurilor (V) și al muchiilor *(M)* aparține geometriei bețivului? l-am întrebat, mai mult ca să-mi încredințez prietenul că am înțeles bine cele spuse de el.

— Da, mi-a răspuns el. Și, dacă noaptea ne va fi prielnică, poate că vom reuși să stabilim împreună încă o formulă

topologică de toată frumusețea. Dar deocamdată cred că ar fi timpul să revenim la lucrarea lui Kempe. Ca să demonstreze teorema celor patru culori, el imaginează un procedeu prin care poate descompune o hartă colorată, să spunem în patru culori, în domenii colorate numai cu două culori. Aceste domenii sînt numite azi *lanțurile lui Kempe*. Iată cum se obțin: dacă harta e colorată cu patru culori, fie ele roșu, verde, albastru și galben, atunci, spune Kempe, dacă ne îndreptăm atenția numai spre regiunile colorate în roșu și verde, vom observa că ele formează unul sau mai multe domenii separate, adică domenii care nu au hotare în comun, deși este posibil ca ele să se întîlnească în unul sau mai multe puncte. Aceste domenii vor fi înconjurate și vor înconjura alte domenii compuse din regiuni albastre și galbene, iar aceste două mulțimi de domenii acoperă întreaga hartă. Noțiunea de lanț, introdusă astfel de Kempe, a fost utilizată cu folos și de alți topologi în problemele despre colorarea hărților.

— Dacă am înțeles eu bine, lanțul lui Kempe este o porțiune simplu conexă care se obține legînd laolaltă regiuni învecinate de pe hartă colorate numai cu două culori dinainte stabilite. Cred că o hartă poate conține mai multe lanțuri Kempe caracterizate prin aceleași două culori, nu-i așa?

— Desigur, dacă într-un loc toate regiunile roșu-verde sînt înconjurate de altele galben-albastru, acolo lanțul se întrerupe. Poate însă să se formeze în alt loc un alt lanț roșu-verde, fie el și numai din două sau chiar dintr-o singură regiune! De altfel, la aceasta face aluzie și Kempe cînd vorbește „de unul sau de mai multe domenii separate".

— Mă întreb de ce le-a născocit? Nu văd cum intenționează să folosească aceste lanțuri, chiar dacă este vorba de o geometrie care se are bine cu un pahar de vin, a replicat Vasile Rotaru.

— Totuși, nu-i chiar așa de greu de ghicit, am observat eu, dacă știi ce se urmărește! Kempe s-a gîndit, cred, să folosească domeniile în două culori învecinate de altele care nu le conțin pe acestea, fiindcă așa poate schimba culorile între ele.

— Da, s-ar putea, a încuviințat el, numai cu condiția să se ducă procedeul pînă la capăt, adică oriunde-i roșu să pună verde și oriunde-i verde să pună roșu, căci altfel se pot produce încurcături.

— Cît privește un singur lanț, da. Dar nu-i necesar să se procedeze la fel în toate lanțurile formate din aceleași culori, a lămurit Teodor Solonar.

— Însă dacă se schimbă între ele culorile unui singur lanț, iar celelalte rămîn cum au fost, se obține o hartă deosebită de cea originală, a răspuns geograful.

— Așa-i. Și nu numai una, ci o mulțime de hărți, toate deosebite unele de altele, dar colorate cu aceleași culori și în același număr. Astfel pusă, iată o nouă problemă care s-a detașat de teorema celor patru culori și a devenit independentă: aceea a stabilirii diverselor moduri de a colora aceeași hartă cu același număr de culori.

— Îmi închipui. Căci, dacă s-ar schimba cele două culori ale unui lanț, în toate lanțurile de pe hartă nu s-ar obține nimic nou, fiindcă ar fi o simplă permutare de culori, pe cînd dacă acest schimb de culori se face numai parțial, adică pe anumite lanțuri, atunci harta are din punctul de vedere al colorării un alt aspect.

— Poate fi însă interesant să se cunoască mai îndeaproape care-i natura acestui procedeu de a transforma o hartă prin permutarea celor patru culori! a observat geograful.

— Nu cred însă că acest lucru l-a urmărit Kempe! am spus eu.

— Nu, a adăugat prietenul meu. Folosind schimbarea celor două culori dintr-un lanț, Kempe arată că se poate modifica în așa fel colorarea hărții, încît orice vîrf în care patru sau cinci regiuni și nu mai multe trebuiau colorate cu patru culori diferite să se poată colora numai cu trei culori diferite.

— Dar ca demonstrația lui să fie completă ar trebui să mai arate că nu există hărți în care se întîlnesc mai mult de cinci muchii într-un vîrf, ceea ce nu este adevărat!

— Nu a greșit aici, fiindcă a putut generaliza rezultatul obținut și la cazul regiunilor unde în jurul unui vîrf se întîlnesc oricîte muchii!

— Atunci a procedat bine?

— Așa se părea. Timp de 11 ani s-a crezut că demonstrația a reușit. Am putea spune că aceștia au fost singurii ani de pace și de liniște pentru toți cei ce s-au interesat de această problemă. După aceea tulburările nu au mai luat sfîrșit nici pînă azi!

— Văd că nu a fost prea simplu să se stabilească unde era eroarea în raționamentul lui Kempe?

— Știu eu ce să vă spun? Veți vedea singuri că nu era nici prea complicat! Ca să ajungă la demonstrație, Kempe avea nevoie să stabilească o legătură între numărul vîrfurilor, al muchiilor și al fețelor unei hărți. Și tocmai la această numărătoare a greșit. Noi putem să stabilim această relație corect, pornind de la poliedrele convexe din fața noastră.

— Adică a venit vremea să găsim relația de care pomeneai adineauri?

— Exact. De aceea vă rog să numărați cîte muchii pornesc din fiecare vîrf al poliedrelor de pe masă?

— Știm mai dinainte: cîte trei, am răspuns amîndoi deodată.

— Vă întreb, ne-a lămurit Teodor, fiindcă, deși multe poliedre au această proprietate, sînt altele în care numărul muchiilor ce pleacă dintr-un vîrf nu-i constant sau nu-i trei. Noi însă vom considera numai poliedrele cu *vîrfuri triple*, adică avînd cîte trei muchii de fiecare vîrf, și vă rog să-mi scrieți consecințele ce decurg de aici.

— Nu ne dăm seama cum, am răspuns amîndoi. Știm să scriem doar relația lui Descartes:

$$F + V = M + 2, \qquad (1)$$

valabilă pentru orice poliedru.

— Se mai poate stabili încă una, tot așa de generală, dacă vă referiți la natura fețelor poliedrului. Anume, notînd cu f_3 numărul fețelor triunghiulare, cu $f_4 f_5$ etc. ale celor patru-

latere, pentagonale ș.a.m.d., rezultă că F este suma tuturor fețelor triunghiulare, pătrate, pentagonale ș.a.m.d., adică

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots$$

sau, sub formă prescurtată,

$$F = \sum_{n=3}^{p} f_n \qquad (2)$$

dacă p este cel mai mare număr de muchii ale unei fețe. Apoi în legătură cu muchiile...

— Stai măi, nu trece așa cu tăvălugul peste formule. Știi tu ce comoară este semnul acesta al sumei? Tot să-l privești și să nu te saturi de el! s-a răstit pe neașteptate Vasile Rotaru. Halal de mijloacele care le aveți voi la îndemînă! Cu așa mijloace, nici nu-i de mirare să faceți descoperiri mari! Unde am eu un semn ca acesta care să-mi strîngă toate țărișoarele mele, cu condițiile lor, economice sau climatice, la un loc în așa fel ca să le văd și eu pe toate deodată în fața mea așa cum vezi tu aici fiecare față a poliedrului numai dacă faci $n = 3$, $n = 4$ sau $n = 12$!

— Măi Vasile măi! elanul tău îmi arată că ar fi cazul să rog pe ospătar să ne aducă niște cafele și, mai ales, apă minerală!

— Păcat de tine, Toderiță-nene! Acum văd eu că habar n-ai de frumusețea matematicilor! s-a supărat geograful. Știi să scrii formule, asta da, dar atît! Ai rămas tu vreodată mut de admirație, cu sufletul la gură, ca în fața unui tablou celebru, scriind un Σ? Ei bine, să știi tu asta de la mine: eu nu mă mai satur privind la acest semn! *In vino veritas*!

— Atunci lasă-mă să-ți fac plăcerea, adăugînd lîngă el altul și mai și. Dacă socotim fiecare muchie de două ori, adică o dată aparținînd la o față și a doua oară ca aparținînd fetei alăturate pentru care ea este hotar, atunci e evidentă relația: $2M = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$, adică folosind semnul admirat de tine

$$2M = \sum_{n=3}^{p} n\, f_n. \qquad (3)$$

Pentru cazul special de care am vorbit, cînd numărul muchiilor dintr-un vîrf rămîne mereu trei, putem adăuga încă și relația:

$$2M = 3V \tag{4}$$

Am stabilit astfel patru relații diferite. Să folosim trei dintre ele ca să găsim valorile lui M, V și F și apoi să înlocuim aceste valori în a patra. De pildă, din (4) rezultă $V = \frac{2M}{3}$. Înlocuind în (1) și calculînd, găsim $F = 2 + \frac{M}{3}$ sau

$$3F = 6 + M \tag{5}$$

Dar din (2) $F = \sum_{n=3}^{p} f_n$ și (3) $M = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{p} n f_n$, așa că, înlocuind în (5), avem

$$3 \sum_{n=3}^{p} f_n = 6 + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{p} n f_n$$

sau

$$\sum_{n=3}^{p} (6 - n) f_n = 12. \tag{6}$$

Făcînd în formula (6) pe $n = 3,4,5,6$, rezultă

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - 0 \cdot f_6 - f_7 - 2f_8 - 3f_9 \ldots = 12.$$

Ei, ce zici, nu-ți place mai mult formula (6) decît (2)?

— De ce să-mi placă mai mult? O găsesc la fel ca prima. Nostim e că nu apare nici un f_6!

— Ai, poate, dreptate; tu ai văzut-o pe (2) întîi și ea a declanșat entuziasmul tău. Dar uite și cafelele; să nu le lăsăm să se răcească, a adăugat Teodor Solonar, ducînd ceașca la gură. Pomeneai mai înainte de *comoară*, dragă Vasile, a reluat discuția prietenul nostru înviorat. Știi tu ce comoară cuprinde această formulă care te-a lăsat rece? Uite! Presupune că ai vrea să afli cîte fețe are poliedrul mărginit numai de pentagoane.

— Atunci voi face $n = 5$ și voi presupune că $f_3 = f_4 = f_7 = f_8 = \ldots = 0$. Rămîne $f_5 = 12$. Cum? Dar e extraordinar, într-adevăr! Formula spune că singurul poliedru convex cu fețe pentagonale este dodecaedrul! Și-i chiar singurul?

La această întrebare Teodor Solonar a izbucnit într-un rîs, din care nu l-a putut opri decît ciuda că rătăcise batista și n-o afla ca să-și șteargă lacrimile.

— Te mai poți îndoi de rezultatul unei formule pe care ai stabilit-o tu însuți?

— Desigur, tocmai de aceea mă îndoiesc! a răspuns acesta rîzînd.

— Atunci mai întreab-o și despre un alt poliedru convex care are, de pildă, fețele triunghiulare sau pătrate!

— Hai! fac o dată $n=3$ și a doua oară $n=4$, presupunînd că toți ceilalți f_n diferiți de 3 sau 4 sînt nuli. Avem:

$$3f_3 = 12, \text{ adică } f_3 = 4, \text{ și } 2f_4 = 12, \text{ adică } f_4 = 6.$$

Privind rezultatele, colegul prietenului meu s-a schimbat la față. Surîzînd maliții os, a spus:

— Ei, în fine, a venit Drăguș la căuș, scumpul meu matematician! Căci te-am prins cu mîța-n sac! La cub nu! nu cunosc alt poliedru convex cu fețe pătrate sau patrulatere afară de cub sau de paralelipiped, deci să presupunem că formula e adevărată! Dar despre poliedre cu fețele triunghiulare? Să te văd cum ai s-o dregi? Adică singurul poliedru convex cu fețe triunghiulare e *tetraedrul?* Parcă nu de mult s-a amintit aici și de octaedru și de icosaedru! Le știe orișicine! Putem întreba și pe careva de la o masă străină! Îți va răspunde fără să clipească: octaedrul este un poliedru convex cu 8 fețe triunghiulare, iar icosaedrul cu 20 de fețe toate triunghiulare! Unde-s, mă rog frumos? Sau a uitat formula matale pe care-mi cereai s-o proslăvesc în versuri poate, să mi le amintească?

Teodor Solonar a izbucnit din nou într-un rîs cu lacrimi, și, fiindcă nu se putea opri, se ruga timid, întinzînd mîna către Vasile Rotaru: taci! te rog taci, că nu mai pot, mor! mor! Taci ca să-mi pot reveni! Nu te știam așa de pătimaș,

măi Vasile, și nici așa de circotaș! Există într-adevăr și octaedru și icosaedru printre poliedrele convexe cu fețe triunghiulare, dar...

— Nici un *dar*, am sărit și eu nerăbdător. Observația domnului Rotaru e justă. De data aceasta într-adevăr că nu există nici un *dar*!

Văzînd coaliția, prietenul meu ne privea tăcînd și rîzînd. Apoi a chemat ospătarul:

— Tovarășe ospătar, mai dă-ne ceva de băut că ni s-au cam uscat gîtlejurile! Și mai comandă niște cafeluțe, dar nu așa de dulci ca cele de mai înainte!

Văzîndu-i atitudinea, ne-am întărîtat și mai grozav. Sfidîndu-l i-am spus:

— Roagă-l pe tovarășul ospătar să ne răspundă în locul tău la întrebare sau mai bine ne lăsăm păgubași. Hai să ascultăm muzica. Bun violonist, cîntă foarte duios!

— Să ascultăm, ne-a răspuns el. Poate că vă va șopti ea și cîte muchii pornesc din vîrfurile unui octaedru și cîte dintr-ale unui icosaedru?

— Așa-i, domnule! De asta am uitat amîndoi, a izbucnit Vasile Rotaru bătîndu-se cu mîna pe frunte! Va să zică de asta...

— Va să zică de asta! a îngînat și Teodor Solonar, adăugînd: Mi se pare că violonistul a început acum *Suspine crude pieptu-mi zdrobește*, romanță veche pe care o cînta tatăl meu pe cînd eram copil. Văzîndu-ne că ne uităm unul la altul, zîmbind spășiți, prietenul meu a continuat:

— Acum sper că sînteți pe deplin convinși că formula se poate aplica și unei hărți desenate pe o sferă, căci, fiind vorba de o deformare continuă, fără rupturi sau lipituri, deosebirea dintre poliedru și hartă constă doar în aceea că fețele poliedrului s-au deformat în porțiuni de pe sferă mărginite de arce de cerc. Mai mult, fiindcă pe o hartă sferică pot fi și fețe mărginite de o singură linie sau de două arce de cerc, rezultă că suma din (6) poate începe de la $n=1$ și nu de la $n=3$, ceea ce dă

$$5f_1 + 4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - 2f_8 - \ldots = 12. \quad (7)$$

— Da, se admite și această lărgire a sumei, deoarece nu se introduc condiții străine de raționamentul care a fost făcut. De altfel cred că ea rămîne valabilă și pentru harta plană în care se transpune o hartă sferică!

— Desigur, și aceasta este formula la care ar fi trebuit să ajungă Kempe. El însă nu a ajuns la ea, ci la următoarea:

$$5f_1 + 4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - 2f_8 - \ldots = 0. \quad (8)$$

De aici el a tras concluzia: „primii cinci termeni fiind singurii pozitivi, cel puțin unul dintre $f_1, f_2, \ldots f_5$ trebuie să nu fie zero și deci *orice hartă a unui domeniu simplu conex trebuie să aibă o regiune cu mai puțin de 6 hotare*".

— Rău ne-am mai încurcat, am oftat amîndoi, utitîndune unul la altul. Era clar că trebuia să mai cerem cîte o cafea...

Cafelele au fost comandate. Apoi au urmat lămuririle:

— Cînd am pornit să stabilim această formulă, ne-am așteptat să găsim una în care să fie vorba de mai mult de cinci muchii care se întîlnesc într-un vîrf și, cînd colo, acum ne vorbești de *regiuni cu mai puțin de 6 hotare!* Ce legătură are una cu alta?

— Asta era? s-a înseninat profesorul nostru. Bine, ajungem noi și acolo îndată ce vom petici harta!

— Bine, măi omule, noi îți vorbim serios și tu ne răspunzi în batjocură? i-am spus cu supărat.

— Ba, să am iertare, vorbesc foarte serios. Să știți că nici cuvîntul și nici ideea nu-mi aparțin, ci sînt proprietatea lui Kempe. Chiar aveam de gînd să vă arăt cum peticește el o hartă! Considerînd o regiune de pe hartă mărginită, să zicem, de cinci hotare, o acoperă cu o bucată de hîrtie — un petic — avînd un contur asemănător cu acela al regiunii, dar puțin mai mare, așa fel ca peticul să depășească hotarele; uite așa cum desenez eu aici (fig. 64*a*). Lipind peticul pe suprafața hărții, spune Kempe, i se pot prelungi toate hotarele care ajung la marginea lui, în așa fel ca ele să se unească într-un punct din interiorul peticului (fig. 64*b*), și astfel în locul unei regiuni cu cinci hotare apare pe hartă un vîrf cu cinci muchii. Din relația (8) el trage concluzia că o hartă se

poate petici fără ca să se pună un petic pe o regiune cu mai mult de 5 hotare. Dar atunci, după teorema stabilită de el mai înainte, sînt suficiente numai trei culori ca să se coloreze regiunile din jurul lui. După ce scoate peticul de pe hartă, trebuie o culoare și pentru regiunea care exista acolo, așadar *cu patru culori se poate colora orice hartă!*

— Într-adevăr, iată un raționament ingenios, atît prin ideea lanțurilor, cît și prin aceasta a peticirii, care nu și-a atins scopul.

— Da, uneori și propria-ți minte îți joacă cîte o farsă! Acest articol l-am citit chiar azi-dimineață și mi-a plăcut foarte mult. Are o logică bine strunită, un stil simplu și vioi, de parcă-l auzeam pe autor pledînd la bară!

— Cine știe, poate tocmai de aici i se trage și ghinionul! A urmărit problema avocățește, ademenit de rezultatul pe care-l considera sigur.

Se poate să ai dreptate, căci într-o problemă matematică nu hotărăști tu rezultatul, ci îl dictează datele ei! Ambele idei introduse de Kempe au fost reluate, aprofundate și generalizate de alți matematicieni de mai tîrziu, iar lucrarea lui Kempe este citată ca una dintre lucrările de bază în legătură cu acest subiect. Acela care a arătat că formula (8) din demonstrația lui Kempe nu-i exactă și că trebuie înlocuită cu (7) a fost P.J. Heawood. Și-a început studiile la Universitatea din Oxford în 1880 și problema l-a atras de cînd a auzit despre ea la unul dintre cursurile pe care le frecventa. Atunci a citit și articolul lui Kempe, pe care l-a studiat apoi cu mult sîrg ani de-a rîndul. În 1890 publică primele sale rezultate sub titlul *Teorema despre colorarea hărții*. Autorul nu se mărginește să arate aici numai eroarea teoretică din care Kempe și-a tras consecințele cu privire la posibilitatea demonstrării teoremei celor patru culori, ci stabilește totodată că cinci culori sînt cu siguranță suficiente pentru a colora orice hartă plană sau sferică.

— Dar el arată că patru culori nu-s suficiente?

— Nu! Problema rămîne deschisă atîta vreme cît teorema nu a fost demonstrată! Heawood are două mari merite: *primul*, de a fi precizat că teorema nu-i demonstrată și, *al doi-*

lea, că a stabilit o limită superioară a numărului de culori necesare pentru colorarea unei hărți, anume cinci.

— Atunci există și o „teoremă a celor cinci culori" care a fost demonstrată de Heawood?

— Întocmai! Chiar așa este ea numită și cu drept cuvînt, căci Errera, despre care am să vă mai vorbesc în seara aceasta, nu-i de loc de acord cu denumirea de „teoremă a celor patru culori", fiindcă, spune el, „o propoziție nedemonstrată și, poate, falsă nu merită de loc numele de teoremă"!

— Și atunci cum o numește Errera? Nu m-aș mira să-i zică totuși *teoremă*, ținînd seama de o anume calitate a geometriei în care încerci să ne inițiezi.

— Degeaba insinuezi, dragul meu. Errera vorbește de *Problema celor patru culori*. El publică în „Periodico di matematiche" din 1927 un documentat istoric al problemei, din care am reținut și observația aceasta. Un alt istoric îl face A. Sainte-Lague într-o fasciculă din „Mémorial des Sciences Mathématiques" din 1929. Am răsfoit și această fasciculă azi-dimineață și mi-a plăcut să zăbovesc asupra bibliografiei pe care o dă la sfîrșitul acestei ample lucrări, în care teorema celor patru culori apare numai ca un capitol. Sînt citate acolo, în afară de vreo 6 tratate generale de *Recreații matematice*, unde se găsesc referințe despre problemă, *118 articole tipărite de revistele de matematici* în legătură cu această teoremă. Dar acestea nu sînt toate lucrările! Mai întîi pentru că ele se opresc la anul 1927, an în care am găsit citat articolul lui Errera despre care v-am vorbit. Dar din 1927 și pînă azi, timp de 40 de ani, dacă socotim în medie numai cîte 5 articole pe an, ar mai fi vreo 200! Însă vă pot asigura că numărul lor este cu mult mai mare. O știu fiindcă m-am uitat, așa numai de curiozitate, în cîteva volume din „Mathematical Review", revistă de recenzii a publicațiilor matematice. Spre marea mea uimire, am văzut că teorema celor patru culori are o rubrică special rezervată pentru ea în cadrul articolelor de topologie. Vă spun drept, nu-mi închipuiam că acestei probleme i s-a acordat chiar atîta atenție și de aceea cele constatate m-au surprins. Eu m-am apucat să cercetez *Mathematical Review* fiindcă citisem într-un articol din volumul al II-lea al cărții lui H. Tietze *Probleme mate-*

matice rezolvate și nerezolvate, anume într-o notă subliniară, știrea că, în timp ce volumul era sub tipar, doi tineri matematicieni, W. Brödel și H. Heesch, ar fi stabilit, independent unul de altul, că teorema celor patru culori este exactă!

— Adică orice hartă se poate colora numai cu patru culori!

— Da. Și eram foarte curios să văd aceste articole. De aceea am căutat la articolele de topologie recenzate în „Mathematical Review" începînd din 1947.

— Și te-a răbdat inima să taci pînă acum?

— Da, fiindcă n-am găsit ce căutam. Adică nu am dat peste articolul lui Heesch, iar pe cel al lui W. Brödel, deși l-am aflat publicat în anul 1947...

— Ce s-a întîmplat cu el? De ce zîmbești?

— Fiindcă recenzentul, după ce scrie că „autorul *anunță* o soluție în problema celor patru culori și arată metoda pe care o folosește", adaugă „Din scurta indicație a autorului nu se poate stabili cum a fost determinat rezultatul și se așteaptă detalii asupra acestei demonstrații". Am căutat *detaliile* în anii următori, dar n-am mai găsit nici un alt articol. De altfel aș putea să vă dau și o dovadă că am cercetat conștiincios toate articolele despre această problemă, arătîndu-vă că mai urmăream ceva. Anume, tot dintr-o notiță din lucrarea lui Tietze despre problema celor patru culori, am aflat și despre pasiunea prof. Heawood pentru această problemă, el fiind considerat ca cel mai vechi și mai fidel admirator al ei. De aceea, o dată cu articolele lui Brödel și H. Heesch căutam în „Mathematical Review" și articolele lui Heawood.

— Nu trebuie să te justifici, spune-ne mai bine care-i rezultatul anchetei tale?

— Ultimul articol al lui P.J. Heawood, pe care l-am găsit eu, este din anul 1949 și are exact același titlu: „Teorema despre colorarea hărții", ca și primul articol pe care l-a scris în 1889 și a apărut în 1890!

— Atunci, să facem o socoteală: 1949—1889 = 60!

— Da! Ce spuneți de această performanță? 60 de ani încheiați să te preocupe o problemă! Timp de 60 de ani spre ca să-ți alerge toate gîndurile pe care i le puteai închina din timpul odihnei.

— Ei, nu mai exagera și tu, de ce tocmai din timpul odihnei?

— Dar nu exagerez de loc. P.J. Heawood a fost numit în 1887, cînd și-a terminat cursurile de la Oxford, lector la Universitatea din Durham, în nord-estul Angliei. Ei bine, recunoști cred că o mare parte a timpului său era folosit pentru munca universitară. Din 1911 e numit profesor de matematici la aceeași universitate. Aici a rămas pînă la sfîrșitul carierei sale și desigur că în această calitate a mai avut și alte preocupări!

— Timp de 60 de ani să te gîndești la o problemă pe care constați că nu o poți rezolva! Cîți ani putea să aibă cînd a început să lucreze? 20—22?

— Cam așa. Prima lucrare i-a apărut la 28 de ani.

— Și ultima la 88! Recunoaște și tu că-i dezolant!

— Nu recunosc nimic. Ar fi dezolant, cum spui tu, dacă gîndurile ar trebui să se zbată neputincioase, ciocănind mereu în același loc, dar nu cînd această problemă i-a dat posibilitatea să se avînte în variate domenii ale matematicilor, căutînd acolo ajutor și oferind în același timp ajutor. Nu-i dezolant, ci un record!

— Stilul tău e prea metaforic pentru această oră. Ceasul arată ora unu și, la această mică oră, puterea mea de înțelegere e și mai mică, a spus Vasile Rotaru, adăugînd: Poate că prietenul tău, mai obișnuit, după cum am văzut, cu probleme de matematici, să fi înțeles la ce voiai să faci aluzie cu ciocănitul, dar eu... n-am înțeles! Adică s-a ocupat sau nu s-a ocupat *mereu* de problema celor patru culori? N-ai spus că pînă și titlul ultimului articol este la fel cu acela al lucrării publicate cu 60 de ani în urmă?

— Adevărat! Însă, deși titlul a rămas același, conținutul s-a schimbat. Fără să intru în amănunte, trebuie să-ți spun că Heawood întîi, apoi și alți matematicieni, au stabilit corelații între anumite domenii din topologie, geometrie, algebră, aritmetică etc., cu alte cuvinte au transpus teorema celor patru culori din domeniul topologiei fie într-o teoremă din domeniul geometriei, ca, de pildă, relativ la studiul secțiunilor unui poliedru sau al diferitelor tipuri de poliedre care se pot construi, fie în domeniul algebrei, legînd-o de

congruențele liniare sau de calculul matricelor și așa mai departe. Ca să te conving, află că ultima lucrare a lui Heawood este o continuare a alteia în care se stabilise modul de transpunere a teoremei celor patru culori în domeniul aritmeticii. Autorul găsește o soluție aritmetică a problemei, și astfel o rezolvă, dacă nu în mod general, cel puțin pentru foarte multe cazuri particulare! Dar, rămînînd chiar în domeniul topologiei, nici aici nu s-a ciocănit într-un loc, ci au fost concepute diferite moduri de a ataca problema! De pildă s-a dedus o interesantă formulă de recurență care exprimă numărul modurilor de a colora o hartă în funcție de numărul fețelor, rezultat frumos care compensează faptul că problema a rămas deschisă. Cît privește metoda imaginată de Kempe, aceea a peticirii și a permutării celor două culori dintr-un lanț, știți cîte aspecte noi a căpătat?

Mi se pare că nu v-am spus că în toate demonstrațiile asupra colorării unei hărți se presupune harta corespunzătoare unui poliedru cu vîrfuri triple, numită *hartă normală*.

— Atunci definești *hartă normală* aceea cu toate vîrfurile triple?

— Dacă și regiunile în care e împărțită ea sînt simplu conexe.

— Dar în acest caz demonstrațiile au un caracter particular, căci în majoritatea lor hărțile au și vîrfuri multiple!

— De loc, prietene! Chiar numai faptul că o hartă capătă numele de *normală* ar trebui să-ți trezească bănuiala că celelalte hărți pot fi reduse la această configurație! Articolul lui Kempe oferă o metodă foarte ingenioasă de a reduce orice hartă cu vîrfuri multiple, cum spui tu, la o hartă normală.

— Vrei să vorbești iar de peticirea hărților?

— Da. Uită-te și vei vedea. Fie (fig. 65) un vîrf T în care s-au întîlnit cinci muchii. Dacă pun peste el un peticuț, ca, de pildă, acest cerc, el acoperă vîrful T și ia te uită ce aspect ia harta! (fig. 66).

— Într-adevăr, a apărut, ce-i drept, și o față nouă, dar în locul vîrfului T cu cinci muchii au răsărit 5 vîrfuri, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, toate triple! Cu alte cuvinte, o hartă normală, numai că avînd o regiune mai mult! Ce te faci cu fața adăugată?

— A, despre ea n-avea nici o grijă, căci aici nu-i vorba de altceva decît de colorarea ei și de felul cum trebuie s-o faci. Ținînd seama că noua regiune se învecinează cu toate celelalte, culoarea pe care o capătă nu poate fi a nici uneia dintre regiunile alăturate ei, ci alta deosebită de ele. Deci dacă după colorare se înlătură peticul, atunci harta originală rămîne exact cu aceeași colorație ca și harta normală la care am redus-o prin peticire! După cum am mai spus, metoda permutării culorilor dintr-un lanț urmărește să se reducă colorarea unei hărți la colorarea alteia despre care se știe sigur că ar putea fi colorată în patru culori! Evident, dacă s-ar putea stabili că orice hartă poate fi redusă astfel, teorema ar fi demonstrată. De fapt, metoda reducerii este echivalentă cu studiul diferitelor tipuri de poliedre. Or, acest studiu este așa de vast, că nici pînă azi nu a fost încheiat. Iată deci o metodă foarte îmbietoare și care a tentat pe mulți topologi s-o folosească! S-au stabilit teoreme importante cu largi aplicații, despre care nici nu putem aminti, pentru că formularea lor implică o terminologie de specialitate. Sînt însă și rezultate pe care le putem menționa. S-a dovedit, de pildă, că pentru colorarea unei hărți care conține pînă la 36 de regiuni sînt suficiente numai patru culori. Nu mai vorbesc de o mulțime de teoreme cu caracter particular, fiecare cu farmecul ei, stabilite toate de Heawood, de pildă „condiția necesară și suficientă ca o hartă normală să poată fi colorată numai cu două culori este ca toate vîrfurile ei să fie pare".

Recunoașteți, poate, că teorema aceasta a fost aplicată în mod empiric cu mult înainte ca Heawood s-o fi formulat în această terminologie savantă de mulți artiști făuritori de încîntătoare arabescuri colorate numai cu două culori? Și, ca un corolar al acestei teoreme, tot el demonstrează teorema celor trei culori: „Condiția necesară și suficientă ca o hartă normală să fie colorată în cel mult trei culori este ca fiecare regiune a ei să aibă un număr par de muchii".

De aici Heawood a condus la această teoremă: „O hartă normală în care fiecare regiune are $3n$ muchii poate fi colorată cu patru culori".

Un rezultat și mai larg decît acesta îl stabilește cu cîțiva ani mai tîrziu C.E. Winn: „O hartă normală care conține cel

puțin o regiune cu mai mult de 6 muchii poate fi colorată în patru culori".

Dar n-am amintit nimic despre problema colorării hărților de pe alte suprafețe decît o sferă! De pildă colorarea hărții unui inel, a unui *tor* cum îi spunem noi. Aflați că pentru o asemenea suprafață, deși problema ar părea mai dificilă, ea a fost deplin rezolvată și tot de prof. Heawood. El a demonstrat că un geograf care ar trăi pe inelul lui Saturn, cel mai intuitiv exemplu de tor, are nevoie de 7 culori ca să coloreze o hartă pe care ar trebui s-o execute el. Cu alte cuvinte, Heawood a arătat că numărul cromatic al torului este 7.

Într-adevăr, alta-i desfășurarea torului pe un plan și alta a sferei, a remarcat geograful. Ca să pot desena harta regiunilor de pe tor ar trebui să-mi închipui că tai suprafața torului întîi după un cerc transversal, apoi după o generatoare circulară longitudinală, iar apoi, printr-o deformare continuă, să aștern suprafața pe un plan (fig. 67). În acest caz (fig. 68 *a*) trebuie să considerăm că marginile AB și CD se lipesc una de alta și la fel AC și BD, deci regiunile care au aceste margini sînt limitrofe și, prin urmare, nu pot fi colorate cu aceleași culori ca în cazul unei hărți obișnuite a sferei (fig. 68 *b*).

— E curios cum de s-a putut rezolva această problemă, care pare totuși mai complicată! Căci dacă s-a putut stabili un paralelism între un poliedru convex și sferă, în cazul torului ar părea că este vorba de un poliedru convex în care s-ar săpa un tunel.

— Da, chiar așa a procedat și Heawood cînd a stabilit numărul cromatic al torului. El s-a întrebat cîte culori sînt necesare ca să se coloreze regiunile de pe fața unui poliedru convex găurit printr-un tunel. Ba chiar a generalizat problema și pentru cazul unui poliedru convex străbătut de un număr mai mare de tunele.

— Așadar, dacă vreodată vor trăi oameni și pe inelul lui Saturn, pentru ei problema numărului cromatic al hărților nu va reprezenta nici o enigmă? Vor afla îndată că-i șapte!

— Depinde de ce fel de matematicieni vor fi fiind ei!

— Oricum, presupunînd că vor fi ca noi, nu vor avea, săracii, prilejul să se mai chinuiască într-o seară ca aceasta, neștiind ce număr cromatic au: patru sau, poate, cinci.

— Da, domnule, amarnică întrebare. Și, după cît este de îndoielnic răspunsul, ne putem mîndri că l-am suportat destul de bărbătește. Plutim ca într-o ceață din care nu se mai poate deslușî nimic precis!

— Exagerezi, prietene! Uită-te numai la tinerii care dansează acolo pe platformă; nu deslușești oare destul de clar cît se chinuiesc, bieții de ei?!

— Ce să le faci, Vasile? Zi-i tinerețe și pace! Cînd vor fi ca noi... își vor pune și ei alte probleme, poate chiar mai pestrițe decît ale noastre! Ai făcut însă o glumă potrivită afirmînd că plutim ca într-o ceață, fiind și foarte aproape de adevăr în ceea ce privește miezul problemei noastre. Dar asta nu l-a împiedicat pe J. Petersen, care a scris într-un articol ceea ce ne-ai spus tu ieri, anume că: „Dacă s-ar pune rămășag, aș paria că teorema celor patru culori nu-i adevărată", să se ocupe mult de ea. Despre lucrările lui însă nu am putut vorbi de loc, fiindcă el a atacat problema dintr-un punct de vedere prea ermetic pentru convorbirea noastră.

— Dar dacă problema ar fi falsă s-ar putea găsi un exemplu care s-o infirme? am întrebat eu.

— Și această problemă s-a pus! ne-a lămurit Teodor Solonar. A pus-o chiar adoratorul ei cel mai constant, prof. Heawood, calculînd care-i posibilitatea ca teorema să nu fie adevărată la un moment dat, adică ținîndu-se seama de toate rezultatele sigure obținute pînă atunci.

Ei bine, probabilitatea ca să se găsească o hartă normală cu mai mult de 36 de regiuni (căci pînă la 36 de regiuni faptul a fost stabilit în 1940 de Winn) care să nu poată fi colorată cu patru culori, este mai mică decît 1 împărțit la $\cdot 10^{10\,000}$!

— Cum spui? S-ar putea găsi o hartă din zece la puterea zece mii care să nu fie posibil să se coloreze cu patru culori? Asta înseamnă: dacă 10^3 fac 1 000, 10^6 fac 1 000 000...

— Stai! Oprește-te, a rîs prietenul meu, căci nu vei putea ajunge nici pînă la zece la puterea o sută, nu la puterea 10 000! Gîndește-te că 10^{12} fac un milion de milioane, număr pe care

nu-l mai poți intui, deși îl poți scrie! Dar dacă te interesează, ți-aș mai spune că numărul hărților cu 35 sau mai puțin de 35 de regiuni care s-ar putea construi pe o sferă este mai mare decît 10^{35} și dintre ele s-ar putea ca una să nu se poată colora numai cu patru culori. Ce zici?

— Atunci hai să mergem acasă. Amețeala cu vin trece și nu mă tem de ea, dar de asta a cifrelor mă tem! Mai înainte, cînd am început să socotesc, dacă nu mă opreai tu, măi Todirel, nu știu ce se întîmpla! Mă apucase așa ca un fel de patimă și cred că, dacă mă lăsai, uitam de voi și aș fi stat să socotesc și acum. Nu știu cum, dar calculul are ceva în el care te atrage... De altfel vă spun drept că eu simt o plăcere deosebită cînd calculez... cînd fac statistici... Dar să nu mă înțelegeți greșit! Vorbesc de *calcule*, nu de matematici!

— De loc. Te înțeleg și îți dau dreptate. Ion Ionescu, pe care aș putea spune că-l ador pentru articolele sale de popularizare a matematicilor — primele de acest gen de la noi din țară — are într-unul din volumele sale de *Povestiri științifice*, cred că în primul, un articol de toată frumusețea, intitulat *Mania calculului*. Dacă nu mă înșel, căci sînt mulți ani de cînd l-am citit, mi se pare că-i spune și *calculomanie*. Dar nu la asta voiam să mă refer atunci cînd v-am arătat care-i probabilitatea de a găsi o hartă ce nu s-ar putea colora cu patru culori, ci la altceva.

— La însăși existența acestei probabilități? l-am întrebat eu, ghicindu-i gîndul.

— Da, la asta. Existînd o probabilitate cît de mică de infirmare, înseamnă că nu mai există siguranța că teorema celor patru culori ar putea fi vreodată demonstrată, deși ea ar putea fi practic adevărată. Dar asta am spus-o și eu, așa, ca o vorbă la un pahar de vin și la o oră mică!

CUM IZBUCNEȘTE TALENTUL MATEMATIC

SAU REZOLVAREA ECUAȚIILOR ALGEBRICE DE GRADUL AL TREILEA ȘI MAI MARE CA TREI

— Deși te-am contrazis ieri, să știi că aveai dreptate, mi-a spus prietenul meu Teodor Solonar cînd, potrivit obiceiului, ne-am așezat la taclale. Am făcut-o mai mult din punct de vedere diplomatic!

— Am înțeles-o de cum ai început să te înfierbînți! Nu erai să-i dai apă la moară nepotului meu și să-i justifici notele rele pe care le ia la matematici de o bucată de vreme încoace! Totuși, aveai dreptate, căci, lăsînd la o parte cazurile cu totul excepționale, matematicile care se predau în școala medie pot fi învățate de orice elev. Nu-i nevoie de talent matematic pentru a le înțelege, ci de atenție și sîrguință, calități pe care nu le prea cultivă Nucu al nostru. Însă nu-i mai puțin adevărat că nu te simți atras de ele decît dacă ai în tine același elan pe care-l are sămînța pusă-n pămînt cînd îi vine vremea să încolțească. Atunci colțul sparge coaja, așa mic și neputincios cum e, și ocolește obstacolele din cale-i numai ca să iasă din pămînt. De multe ori mă minunez eu de această putere. Ai băgat de seamă cum ies ghioceii și brebeneii primăvara de sub frunze și zăpadă? Cum dislocă, ca să-și facă loc, un bulgăraș de pămînt sau o frunză înghețată și prinsă de locul pe unde ar trebui să se ridice? Mă uit adesea și la cîte o sămîncioară cum iese la suprafață cu căciulița învelișului de care era prins miezul, împovărată de cîteva fire de nisip mai grele decît tulpinița. Ei bine, nicăieri nu-mi apare această imagine mai clară decît atunci cînd mă gîndesc la povestea lui Tartaglia în legătură cu rezolvarea ecuației de gradul trei prin radicali și apoi la urmarea ei, la Ferrari, la Abel și Galois, care au dovedit imposibilitatea de a generaliza metoda pentru ecuații de grad mai mare decît patru. Tartaglia, Ferrari, Abel, Galois sînt pentru mine niște floricele rare ale primăverii care-și fac loc printre vreas-

curile și frunzele înghețate din marginea pădurii, răspîndind în jurul lor armonie și frumusețe!

— Tartaglia? Știi că în italienește *tartagliamento* înseamnă „bîlbîială"?

— Da, de aceea chiar și-a ales Nicolo Fontana această poreclă ca nume, fiindcă era bîlbîit!

— O autoironie?

— Mai degrabă un strigăt de revoltă contra atrocităților războiului, „pentru că această poreclă m-a durut multă vreme", scrie el. S-a născut în Brescia pe la 1500. Cînd avea vreo 2 ani, familia lui împreună cu altele vecine s-au ascuns într-o biserică, crezînd că astfel vor putea scăpa de furia dușmanilor care ocupaseră ținutul. Dar n-au scăpat de masacru: tatăl lui a fost ucis, iar lui un soldat i-a sfărîmat țeasta în trei locuri, pe unde i se vedea creierul, și i-a desfăcut fălcile, sfărîmîndu-i măselele. Nu mai putea nici mînca, nici vorbi și din bruma de gospodărie pe care o avuseseră nu mai rămăsese nimic ca să mai aibă cu ce fi îngrijit de un doctor.

El spunea că mama lui, procedînd așa cum a văzut că fac cîinii, adică lingîndu-i rănile, l-a vindecat în cîteva săptămîni. Pe la 5 ani începuse să învețe carte, apoi s-au abătut nenorocirile peste ei. Nemaiavînd bani cu ce să plătească învățătorul, copilul a continuat să învețe mai departe singur, imitînd literele după un model pe care și l-a procurat de la cineva. De unde această dorință de a învăța la acest copil oribil mutilat care te miri cum a mai scăpat cu zile? Desfigurat și sărac, trebuia și să muncească alături de fratele său, cu cîțiva ani mai mare ca el, pentru a întreține o mamă săracă și o soră mai mică. Te întrebi cum a putut învăța și matematica atunci cînd nu erau școli și mai ales profesori de matematici la toate colțurile de stradă, cînd numai principii sau negustorii bogați își puteau permite acest lux? Și nu numai că a învățat matematicile pe care le știa așa de bine ca să le poată preda, asta n-ar fi încă nimic, dar să-l mai traducă pe Arhimede și pe Euclid, să facă prima traducere a lui Arhimede după un text grecesc?

Te miri cum m-am înfierbîntat ieri? Cînd Nucu al tău și alți o mie ca el au totul la îndemînă — cărți, profesori, nici

o grijă alta decît să învețe — și vine aici să-mi spună mie că n-are talent la matematici? În timp ce acel copil sărac și umilit de toți, care abia bîlbîia cîteva vorbe — bîlbîitul Tartaglia — se zbate să înlăture frunza grea și înghețată ce-i apasă colțișorul înverzit, o ocolește ca să-și îndrepte tulpina, deasupra, la soare!

— Nu contest acest impuls interior, care se manifestă nu numai printr-un interes deosebit față de obiectul în sine, fie el matematica, sculptura, istoria, muzica și așa mai departe, ci mai ales printr-o necesitate interioară de a-i sacrifica toată, sau o bună parte din forța ta de muncă. Goethe a exprimat aceasta în autobiografia sa, *Poezie și adevăr*, prin fraza rămasă de atunci celebră: „Geniu sau talent înseamnă unu la sută inspirație și 99 la sută transpirație!" Prin acel *unu la sută*, ca și prin celelalte *99 la sută*, pe care numai anumiți oameni sînt în stare să le realizeze, se deosebesc aceștia de restul semenilor lor. În această muncă simțea Tartaglia fericire și de aceea a făcut tot ce a putut ca să învețe latina, greaca și matematicile. Cred că le învăța treptat, folosind fiecare cunoștință cîștigată și ca mijloc de trai, adică dînd lecții particulare pe la casele înstărite, și din banii pe care-i aduna ajuta familia și își mai cumpăra cîte o carte, prilej de bucurie prin posibilitatea de a adăuga cunoștințe noi la cele ce le poseda.

— Cam așa o spune și el însuși: „Am continuat în tovărășia unei fiice a sărăciei: numele ei era iscusința". Ajutat de această iscusință, el ajunge pe la 20 de ani profesor de matematici, întîi la Verona, unde stă vreo 12 ani, în care timp se mai duce pentru același scop și la Mantova[1], iar din 1534 se stabilește la Veneția ca profesor public.

— Numai că prin secolele XVI, XVII și chiar mai tîrziu a fi profesor însemna cu totul altceva decît acum! Nu numai pentru că numirea și leafa de profesor depindeau fie de bunul plac al administrației Universității respective, fie de renumele pe care ți-l puteai crea, fie de numărul studenților care veneau să se înscrie și să-ți urmeze cursul, ci și de concurențele necinstite sau neserioase pe care aveai să le întîmpini

[1] Mantua.

de la alți pretendenți sau dușmani. Asemenea concurențe se rezolvau de cele mai multe ori prin dispute științifice publice, adevărate meciuri matematice anunțate de crainici și conduse de arbitri, de multe ori nu tocmai imparțiali, la care asista un public numeros.

În volumul al III-lea din *Istoria matematicilor în Italia*, G. Libri observă că e greu de găsit în vreun alt capitol din istoria științelor exemplele unui fapt asemănător: „Pariurile, certurile publice, cartelurile se succedau fără întrerupere; toate clasele societății se interesau de aceste lupte științifice, așa după cum în antichitate se interesau de concursurile poeților și de jocurile atleților".

— O, da! Aceste dispute — eu le-aș zice *turnire* științifice, ca să rămîn în terminologia vremii — erau la modă atunci. Profesorii provocați erau obligați să ia parte la ele, căci de rezultatul obținut depindea nu numai menținerea lor mai departe în posturi, ci și prestigiul lor!

— Fiecare dintre combatanți poseda anumite cunoștințe despre care era convins că nu sînt și în posesiunea celuilalt. Pe acestea își bazau și întrebările pe care le puneau rivalului, întrebări la care celălalt era obligat să răspundă în scris sau oral!

— Da, acest obicei putea fi un motiv destul de serios pentru mulți ca să păstreze în secret descoperirile făcute, care deveneau astfel sursa lor de glorie sau de cîștig. Cel învins risca să-și piardă postul și elevii, iar cîștigătorului îi surîdea gloria de a fi chemat de diferite orașe ca să profeseze acolo.

— Cred că disputele științifice îndeplineau și funcția de prezentare în fața publicului, doritor de a le afla, noutățile, sau preocupările savanților.

— Așa-i. De pildă o asemenea provocare adusă lui Tartaglia în legătură cu rezolvarea ecuației de gradul al treilea a reprezentat stimulentul care a grăbit pașii spre noua construcție a matematicilor moderne.

— Bine, măi Toader, de ce vrei să mă prostești? Rezolvarea ecuației cubice reprezenta ea o *nouă* descoperire? Dar nu știu tot de la tine că această ecuație a fost cunoscută din adînca antichitate? Nu mi-ai spus tu, astă-vară chiar, că înșiși babilonenii au rezolvat ecuația cubică într-o formă

aproape modernă? Și nu ai accentuat că renumita problemă a duplicării cubului conduce la o ecuație de gradul al treilea, pe care grecii au rezolvat-o în chip ingenios prin intersecția de două curbe? Apoi că și Arhimede ajunsese la ecuația cubică cînd i s-a pus problema să taie o sferă printr-un plan astfel ca volumele obținute să se afle într-un anumit raport? Ba chiar și în cartea lui Diofant se află o anumită ecuație de gradul al treilea care se putea reduce la alta de gradul al doilea? Și încă la hinduși...

— Bravo, dragul meu prieten! Mă uimești cu memoria ta și-ți sînt recunoscător pentru atenția cu care m-ai ascultat! Totul e foarte bine și frumos și pari satisfăcut că m-ai prins cu ocaua mică! Numai că tocmai tu, ca istoric, pierzi din vedere ceea ce desigur că n-ai face-o dacă nu ar interveni dorința ta de a mă contrazice un pic! Nu degeaba spune proverbul că cizmarul umblă desculț și croitorul descusut! Toate cele ce mi-ai amintit sînt adevărate, dar ele au fost descoperite de noi mult mai tîrziu, atunci cînd au început cercetările temeinice ale istoriei matematicilor și nu în secolul al XVI-lea! Pe atunci matematicienii nu știau să rezolve decît ecuațiile de gradul întîi și al doilea sau unele ecuații care se reduceau la acestea. Cei mai buni matematicieni ai timpului erau de părere că ecuațiile de gradul al treilea sau al patrulea *nu pot fi deocamdată rezolvate*, așa după cum afirmase și Luca Pacioli în vestita sa carte *Summa de arithmetica*, apărută numai cu cîțiva ani înainte de 1 500. Cardan însuși scrie că rezolvarea lor reprezenta „o piatră de încercare a forței spiritului, așa că oricine ar realiza-o poate crede că nimic nu-i va mai scăpa"!

Cît despre rădăcinile negative sau imaginare ale unei ecuații, nici vorbă nu putea fi. Iată de ce rezolvarea ecuației cubice a însemnat un mare pas înainte și, ca să-l apreciezi cum trebuie, am să-ți citez relativ la aceasta o observație făcută de un foarte destoinic cercetător al istoriei matematicilor, H. G. Zeuthen: „Pentru a cîștiga încrederea în propriile sale forțe (este vorba de știința matematică—*Fl. C.*), îi era necesară încurajarea de a se vedea capabilă să găsească ceva ce rămăsese necunoscut savanților veneranți. Așa se explică de ce descoperirea rezolvării ecuației de gradul al treilea în

prima jumătate a secolului al XVI-lea a fost semnalul unei noi și rapide dezvoltări a tuturor ramurilor matematicilor pure și aplicate. E suficient să-l citățm pe Viete, Galilei, Kepler, Neper, Fermat, Descartes, ca să stabilim diversitatea direcțiilor acestei noi dezvoltări și marea ei importanță".

— După cîte înțeleg, rezolvarea ecuației cubice trebuie să fi preocupat atunci pe mulți matematicieni?

— Desigur. Nu numai că se făceau diferite încercări de a o rezolva, dar mulți matematicieni erau încredințați că există unii dintre ei care dețin secretul rezolvării acestor ecuații. De altfel prima provocare pe care o primește Tartaglia prin anul 1530 se referă exact la această rezolvare. Anume, un profesor, numit Zuanne di Tonini da Coi, care avea o școală de aritmetică la Brescia (orașul natal al lui Tartaglia), îi cere să rezolve două probleme care conduc la ecuațiile

$$x^3 + 3x^2 = 5$$

și

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1\,000.$$

Tartaglia nu numai că nu-i rezolvă problemele, dar îi și răspunde cam așa: „Îmi pretindeți să rezolv două probleme care sînt ca și imposibil de dezlegat și a căror soluție nu vă este cunoscută. Credeți că în felul acesta mă veți putea înșela și pe mine ca să puteți trece drept un mare matematician, așa cum ați procedat pînă acum și cu alți profesori din Brescia? Știu că ei se tem de dv. și vă evită pentru că le propuneți probleme pe care dv. singur nu le puteți rezolva, dar ei cred că dv. le puteți rezolva și de aceea vă cedează în toate. Eu pariez zece ducați contra cinci că așa s-a întîmplat și cu aceste două probleme. E un procedeu de care ar trebui să vă rușinați! Nu spun că problemele nu se pot rezolva, ba pot chiar afirma că am găsit o regulă generală de rezolvare a primei ecuații, numai că pentru moment doresc să tac. Cît despre a doua, mărturisesc că pînă acum nu am găsit o regulă generală de rezolvare a ei, dar prin aceasta nu afirm că-i imposibil de stabilit una!"

— Da de unde știi tu așa de exact cele ce i-a răspuns Tartaglia? A povestit el însuși?

— Da, peste vreo 16 ani și chiar în dialog! În 1546 publică o carte sub titlul *Quesiti et inventioni diversi*, în care, o dată cu problemele rezolvate de el, introduce și o mulțime de relatări istorice sau de amintiri personale. În această carte au găsit istoriografii o parte din materialul în legătură cu eroii care au dezlegat ecuația cubică.

— Bine, dar după cît mi se pare te-am auzit cîndva spunînd că formula după care se rezolvă ecuația cubică poartă numele de *formula lui Cardan*. Așadar erou și nu eroi!

— Nu, căci formula asta are și ea un cîntec!

— Atunci aș vrea să-l ascult. Numai că deocamdată sînt curios să știu cum s-a descurcat Tartaglia cu rămășagul pus?

— Ajungem noi și la el, căci pe drumul acesta am pornit. Nu bănuiești cum a fost cu rămășagul? Crezi că domnul Zuanne, pe care Tartaglia nu l-a batjocorit degeaba avea de gînd să recunoască adevărul? Ba poate chiar că și-a cerut umil scuze? Nu! El n-a răspuns la rămășag, dar va lucra mai departe așa cum îi era felești. Avînd cunoștințe și fiind abil la țesutul intrigilor, foarte probabil că a creat în jurul lui Tartaglia, care se bucura de mult prestigiu în lumea savanților, o atmosferă dintre cele mai apăsătoare. Dovadă de prestigiu este că a fost chemat în 1534 ca profesor de matematici la Veneția, deși pînă la această dată Tartaglia nu a publicat nimic.

Și iată că, fiind în Veneția, Tartaglia află că i se va adresa altă provocare, de data aceasta din partea profesorului Anton Maria Fiore, care, deși avea un renume mai mult de calculator decît de matematician, afirma că ar cunoaște regula de rezolvare a *capitolului cub și lucru egal număr*, care i-a fost comunicată cu 30 de ani mai înainte de către un mare matematician. Prin această provocare Fiore urmărea să-l umilească pe Tartaglia, fiindcă se lăuda că știe să rezolve ecuația de gradul al treilea.

— Mai chinezește nici că s-ar putea!

— Ai dreptate, dar ce să fac dacă așa spunea Anton Fiore? Atunci cuvîntul latinesc *capitulum* era folosit cu înțeles de „ecuație", iar necunoscuta era „lucru", adică în latinește

cosa. Dacă încerci să pui în forma de azi această expresie, rezultă o ecuație de forma

$$x^3 + px = q.$$

— Așadar, ecuația de gradul al treilea în care lipsește termenul de gradul al doilea? Prin urmare, o formă deosebită față de ecuația despre care Tartaglia afirmase că știe s-o rezolve, fiindcă din aceea lipsea tocmai termenul de gradul întîi, adică era de forma

$$x^3 + ax^2 = b.$$

— Da. Și faptul l-a îngrijorat. Această nouă formă a ecuației a început să-l preocupe pînă ce i-a dat de capăt. Tartaglia spune că, la opt zile după ce el a reușit să stabilească metoda de rezolvare a ecuațiilor de forma

$$x^3 + px = q, \quad x^3 = px + q, \quad x^3 + q = px,$$

Anton Fiore a venit la Veneția și i-a adresat provocarea publică pe care Tartaglia a primit-o. Așa că atît Fiore, cît și Tartaglia au depus la un notar cîte 30 de probleme plus o anumită sumă de bani, cu condiția ca acela dintre ei care în timp de 30 sau 40 de zile va fi dezlegat cele mai multe dintre probleme va fi declarat învingător și va cîștiga suma depusă.

— Nu înțeleg însă de ce mi-ai înșirat cele trei ecuații, care nu reprezintă decît una și aceeași formă cu coeficienți pozitivi sau negativi!

— Fiindcă pe atunci se scriau ecuațiile în așa fel ca în fiecare membru să fie numai termeni pozitivi! Deci pentru vremea aceea ele erau trei ecuații diferite!

— Și chestiunile pe care le-a propus Anton Maria Fiore conduceau în adevăr la rezolvarea ecuației $x^3 + px = q$ cu variantele ei?

— Da. Ele se află în *Quesiti*, iar Tartaglia afirmă că le-a rezolvat pe toate în mai puțin de două ore, în timp ce Anton Fiore nu a comunicat nici una dintre soluțiile problemelor propuse de Tartaglia, afirmînd că lasă soluțiile stabilite de el la aprecierea prietenilor săi.

— Atunci Tartaglia a învins?

— Da. A ieșit învingător și, după cum spune, s-a mulțumit numai cu gloria, renunțînd la premiu.

— Și cine-i savantul care a descoperit formula folosită de Anton Fiore? Trebuie să fi fost un om de o rară modestie dacă nu a ținut s-o lege de numele său!

— Scipione del Ferro. El e adevăratul descoperitor al metodei de rezolvare a ecuației cubice. Fusese un renumit profesor al Universității din Bologna, pe atunci cea mai veche și mai renumită din Apus. El moare în anul 1526, la 61 de ani, lăsînd manuscrisul care conținea formula de rezolvare a ecuației cubice ca moștenire ginerelui său. Astfel formula a fost păstrată în mare taină de familie și era cunoscută doar de unii dintre elevii lui cei mai apropiați. Într-o lucrare de istorie a matematicilor a renumitului matematician italian Ettore Bortolotti, am văzut fotografia unui manuscris, aflat în biblioteca Universității din Bologna, în care se arăta că Scipione del Ferro destăinuiește regula de rezolvare a ecuației cubice unui elev de-al său. Dacă nu ar fi fost amintită povestea acestui duel matematic, probabil că nici nu s-ar mai fi știut despre această importantă contribuție a lui Ferro, cum nu se cunoaște azi nimic nici despre metoda folosită de el ca să stabilească formula și nici despre activitatea lui matematică.

— După cîte văd, formula a fost găsită de Ferro, regăsită de Tartaglia și poartă numele lui Cardan, fiindcă, după cum spune proverbul, „cînd doi se ceartă, al treilea cîștigă!"

— Cam așa-i.

— Spui *cam*, fiindcă ai pomenit adineauri despre *un cîntec*? N-am ajuns la el?

— Nu, fiindcă pînă la el trebuie să mai apară pe scenă încă o dată prietenul nostru, domnul Zuanne di Tonini da Coi.

— Atunci să poftească!

— Stai. Întîi să lăsăm să mai treacă vreo nouă luni după duelul pomenit. De-abia după aceea va sosi dl. Zuanne în Veneția și se va prezenta la Tartaglia, exact ca vulpea în fața corbului cu cașul în cioc. „Am auzit că acum cîteva luni ați avut o dispută cu maestrul Anton Maria Fiore, începe foarte mieros dl. Zuanne, repetînd cu lux de amănunte întreaga

întîmplare. Pînă la Brescia a ajuns faima dv. de a fi rezolvat numai în două ore toate cele 30 de probleme, spune el mai departe, lucru care mi se pare greu de crezut!"

„Ba e foarte adevărat, răspunde Tartaglia. Iar cauza care m-a făcut să le rezolv așa de repede este că toate cele 30 de probleme conduceau la aceeași operație algebrică, anume *lucru și cub egal număr*. Dl. Fiore s-a înșelat crezîndu-l pe fratele Luca—este vorba, bineînțeles, de Fra Luca Pacioli — care afirma în opera sa că e imposibil să se rezolve acest *capitol* printr-o regulă generală! Eu am avut norocul să găsesc această regulă numai cu 8 zile înainte de a mă duce la notar cu problemele mele!"

Și așa, din vorbă în vorbă, dl. Zuanne începe să-l descoase pe Tartaglia, ca să afle, dacă s-ar putea, problemele propuse de el, dar mai ales soluțiile lor. Dar Tartaglia nu se lasă înșelat. Refuză s-o facă și totodată îi amintește de prima lui provocare. Dl. Zuanne însă habar nu are de așa ceva, a uitat cu totul și îi este imposibil să-și mai amintească de ea! Ba nici nu are de gînd să se lase refuzat. Insistă azi și mîine și poimîine, pînă ce smulge, prin rugăciuni și jurăminte, soluția primei probleme pe care Tartaglia o propusese lui Fiore, dar sub forma unui exemplu particular, anume dat de ecuația

$$x^3 + 40x^2 = 2\,888.$$

Zuanne e mulțumit și, întorcîndu-se la Brescia, reușește să stabilească, prin analogie, un fel de formulă care se aplică și la alte ecuații și, din cale-afară de mulțumit, scrie o scrisoare anunțîndu-și succesul și totodată ofensîndu-l cît poate pe Tartaglia, căruia nu-i mai acordă nici prioritatea descoperirii. Tartaglia nu răspunde nici la această scrisoare, nici alteia care-i urmează. În schimb, în acest an, 1537, apare prima lui carte, *Nova scienza*, care-l consacră pe Tartaglia ca un precursor al lui Galilei. În acest timp, la Academia Palatină din Milano, cursurile de matematici erau ținute de Gerolamo Cardan. Era de o vîrstă cu Tartaglia. Studiase matematicile, filozofia și medicina la Universitatea din Pavia, unde își luase diploma de doctor în medicină. Avea o vastă cultură și primii pași spre celebritate îi făcuse încă de

pe vremea studenției. De atunci se remarcase talentul lui oratoric și de improvizație, atît în disputele publice asupra aritmeticii și geometriei, cît și la cursurile despre Euclid sau despre dialectică pe care le-a ținut, suplinind cîtăva vreme pe titularii acestor discipline.

— Fantastică deosebire! La Tartaglia, după cum văd, talentul matematic a izbucnit de la sine, fără alegere sau oscilație. Aș crede că știința matematică era tot atît de intim legată de viața lui ca și un instinct. Spre deosebire de el, lui Cardan îi plăceau matematicile, dar el avea *alegerea*, fiindcă îi *plăcea* și *profesa* cu îndemînare și *medicina*. Știu că era un doctor așa de renumit, încît a fost chemat în Scoția, unde a vindecat pe unul dintre conducătorii regatului de o boală pe care timp de șase ani nu o putuseră vindeca nici doctorii regelui Franței și nici cei ai împăratului Germaniei. I s-au făcut chiar oferte să rămînă acolo, dar el n-a primit.

— Ca profesor de matematici se pregătea să scrie un tratat, care va apărea în 1539, cu titlul *Practica arithmeticae*. Mai avea de gînd să scrie și *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, primul mare tratat dedicat algebrei, cunoscut azi cu numele *Ars magna*.

— Vrei să spui că avea astfel motive să-l intereseze și rezolvarea ecuației de gradul al treilea?

— În cel mai înalt grad! Și tocmai se nimerește bine să sosească la Milano, în 1538, dl Zuanne al nostru. Între el și Cardan se înfiripă de îndată o legătură de prietenie, iar Cardan îi cedează unul dintre cursurile sale. Desigur că această prietenie s-a înfiripat în urma informațiilor și a discuțiilor despre cele două dueluri algebrice ale lui Tartaglia și despre natura metodei folosite de el ca să ajungă la o formulă de rezolvare.

— După cum îl cunosc eu pe Cardan, din extrasele pe care le-am citit în *Propria vita*, autobiografie admirabilă, soră bună a *Confesiunilor* pe care le va scrie cîteva secole mai tîrziu Jean-Jacques Rousseau, cred că numai el a putut accepta tovărășia acestui individ dubios fără să fi fost dezgustat de ea. Mi-aduc aminte că undeva în *Propria vita* el se prezintă pe sine astfel: „Prin natura mea am fost un spirit filozofic

avînd înclinații către științe; sînt ingenios, accesibil, elegant, voluptuos, iute, pios, prieten al adevărului, pasionat pentru meditație, îndrăzneț, doritor de a stăpîni, dotat cu talent inventiv, plin eu însumi de știință, sînt avid de cunoștințe, entuziast în fața miracolelor, șiret, viclean, fals, desfrînat, sobru, muncitor, sîrguincios, flecar, invidios, trist, pradă a mii de contraziceri, prieten al singurătății..."

— Totuși, foarte probabil că discuțiile dintre ei l-au făcut pe Cardan să dorească o apropiere de Tartaglia. Dar Cardan nu-i scrie direct, ci prin intermediul unui librar. Pe acesta îl roagă să intervină pe lîngă Tartaglia ca să-i trimită formula de rezolvare a ecuației $x^3 + px = q$ și cele 30 de probleme puse lui Fiore cu soluțiile lor. Totodată îi propune să rezolve șapte probleme trimise de el, care conduc la ecuații de gradul al treilea și al patrulea. În schimb, Cardan se obligă să tipărească soluția lui Tartaglia sub numele lui sau, dacă nu o dorește, s-o țină secret.

— Cred că și-a găsit omul, nu-i așa?

— Într-adevăr! Tartaglia răspunde librarului că și el intenționează să publice o carte despre algebră și preferă să-și publice singur descoperirile lui. De asemenea nu trimite nici soluțiile celor 30 de probleme, căci, spune el, avîndu-le, nu-i va fi greu unui savant, cum e socotit Cardan, să descopere și regula generală! Iar despre cele șapte probleme propuse arată că recunoaște stilul lui Zuanne, care se află la Milano, fiindcă ultimele două dintre probleme i le-a mai pus el și anul trecut, cînd a venit la Veneția, și nici nu încearcă să le rezolve, fiindcă știe că e imposibil ca în Milano să se cunoască soluțiile acestor probleme, deoarece nu se cunoaște regula de rezolvare a ecuațiilor de forma $x^3 + px = q$, și aceste probleme conduc la ecuații cu mult mai complicate decît acestea.

— Exact așa mi-am închipuit că va proceda Tartaglia. Om dintr-o bucată, nu s-a lăsat nici intimidat, nici flatat de prestigiul de care știa că se bucură Cardan! În schimb, răspunsul trebuie să-l fi ofensat pe Cardan!

— Da, l-a supărat așa de tare, că îi scrie de îndată o scrisoare zbîrnîind de ciudă. Îi spune că este un îngîmfat, ca și Zuanne, că suferă de nebunia de a se crede important, dar ar

fi bine să știe că nu se află pe vîrful muntelui, ci la poalele lui, în cîmpie.

— Așadar, nu avea o părere bună despre Zuanne?

— Probabil că și-o mai schimbase între timp. De altfel se pare că a fost ofensat de faptul că Tartaglia îl consideră incapabil să fi pus singur cele șapte probleme și a avut nevoie de ajutorul lui Zuanne, „ca și cînd — scrie el — n-ar mai exista în Milano cineva care să cunoască asemenea lucruri. Eu le știam mai înainte ca da Coi să fi știut să numere pînă la zece, dacă acesta e așa de tînăr pe cît pretinde!" Dar, după ce-și varsă focul, Cardan include în scrisoare două probleme pe care le propune lui Tartaglia spre rezolvare. La acestea el se oferă să-i trimită și soluțiile dacă Tartaglia nu le va putea găsi, cu condiția ca și Tartaglia să-i trimită în schimb soluția uneia dintre cele șapte probleme propuse anterior!

Tartaglia îi răspunde, trimițîndu-i de data aceasta unele probleme și anumite soluții, dar are grijă să-i spună că nu vrea să se lase păcălit!

Atunci Cardan schimbă tactica. Scrisoarea care urmează începe cu „Domnule Nicolò, scumpul meu", și continuă arătîndu-i că vina neînțelegerilor dintre ei se datorește numai lui da Coi, acum plecat brusc din Milano, lăsînd în părăsire cei 60 de elevi pe care el îi recomandase și care i-l descrisese pe Tartaglia într-un mod defavorabil. Apoi îl invită să vină cît mai repede la Milano, deoarece marchizul del Vasto, protectorul lui Cardan, căruia Tartaglia îi trimisese două dintre instrumentele construite de el, dorește numaidecît să-l cunoască și să stea de vorbă cu el.

— Era, desigur, o nouă cursă, nu-i așa?

— Se pare că da, cel puțin așa pretinde Tartaglia, descriind cele ce s-au petrecut la Milano.

— Dar de dus s-a dus?

— Da, s-a dus destul de repede și Cardan l-a găzduit la el. Tartaglia povestește sub formă de dialog în multe *Que iti*, cu lux de amănunte și vioiciune, discuțiile și întîmplările de atunci și după aceea. E remarcabilă în special problema XXXIII și a fost reprodusă de mulți autori. Dacă vrei, aș încerca să ți-o redau!

— Mai începe vorbă? Știu doar cît îți poate memoria!

— Atunci am să procedez ca și Tartaglia, adică considerînd ca al doilea personaj din dialog pe „Nicolò Tartaglia". Conversația începe îndată după ce Tartaglia este instalat în casa lui Cardan.

Cardan: „Sînt foarte bucuros că marchizul e plecat din oraș. Pînă la venirea lui vom putea discuta împreună despre lucrurile ce ne interesează pe noi. Consider că nu ați fost de loc curtenitor, nedîndu-mi regula pe care ați găsit-o asupra ecuației *lucrul și cubul egal cu un număr* atunci cînd v-am rugat așa de stăruitor".

Tartaglia: „Vă voi spune că am fost zgîrcit nu atît pentru această ecuație și pentru cele ce le-am găsit prin ea, ci pentru ceea ce această ecuație e în stare să descopere, căci ea este o cheie care deschide calea pentru cercetarea unui număr infinit de alte ecuații și, dacă n-aș fi acum ocupat cu traducerea lui Euclid (am ajuns la cartea a XIII-a), aș fi găsit o regulă generală pentru multe alte ecuații! Dar, cum voi termina lucrarea mea despre Euclid, am de gînd să compun un tratat practic despre o nouă algebră, în care voi publica nu numai descoperirile mele despre noile ecuații, ci și multe altele pe care sper să le descopăr și doresc chiar să arăt un mijloc de a descoperi alte multe ecuații, ceea ce sper să fie un lucru foarte util și foarte frumos! Aceasta e cauza care mă face să nu vorbesc cu nimeni despre aceste ecuații (fiind, cum am spus, ocupat cu Euclid). Dacă le-aș arăta unui spirit speculativ, cum este excelența-voastră, el ar putea descoperi ușor alte ecuații, pe care le-ar publica drept invenția sa; or, asta mi-ar dăuna mie. Acesta-i motivul care m-a silit să fiu așa de puțin politicos cu excelența-voastră, cu atît mai mult cu cît dv. aveți de gînd să imprimați o operă despre aceleași probleme, în care ați vrea să inserați și invențiile mele cu numele meu. Aceasta nu-mi surîde de loc, căci doresc ca invențiile mele să mi le public singur în operele mele și nu în ale altora".

Cardan: „Dar v-am scris că, dacă nu doriți, mă oblig să păstrez secretul!"

Tartaglia: „Asta n-o mai cred!"

Cardan: „Vă jur pe sfînta evanghelie și ca un adevărat om de onoare că, dacă îmi destăinuiți invențiile dv., nu numai că nu le voi publica niciodată, dar chiar pentru mine le voi nota cifrat, așa fel ca după moartea mea să nu le mai poată înțelege nimeni. Dacă vreți să mă credeți, credeți-mă; dacă nu, să lăsăm aceasta!"

Tartaglia: „Dacă n-aș crede într-un asemenea jurămînt aș merita să fiu considerat un om fără credință, dar fiindcă acum sînt decis să-l vizitez pe excelența-sa dl. marchiz, sînt trei zile de cînd sînt aici și mă necăjesc așteptîndu-l, vă promit să vă descopăr totul la întoarcere".

Cardan: „Pentru că ați hotărît să-l vizitați pe dl. marchiz, vă voi da o scrisoare ca să știe cine sînteți, dar mai înainte de a pleca vreau să-mi arătați regula care mi-ați promis-o despre ecuația dv.".

Tartaglia: „Bine. Trebuie să știți că am pus regula aceasta în versuri, pentru ca astfel să-mi pot aminti în orice ocazie toate operațiile. Dacă n-aș fi luat această precauție, le-aș putea uita adesea. Nu mă supără că versurile mele nu sînt prea bune; mi-e de ajuns că folosesc să-mi amintească regula ori de cîte ori am nevoie. Ca să fiți sigur că v-am încredințat cu adevărat invenția mea, vă voi da o copie scrisă de mine".

— Cunoști versurile lui Tartaglia? l-am întrerupt pe prietenul meu aproape involuntar.

— Da. Trebuie să știi că le-am tradus chiar pentru uzul meu personal, căci înainte de a rezolva ecuația de gradul al treilea, dată în forma generală

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ea trebuie pusă sub forma considerată de Tartaglia și apoi acesteia i se aplică așa-numita formă a lui Cardan, care e conținută în versurile lui Tartaglia.

— Atunci arată-mi cum se face acest calcul ca să se ajungă la *cub și lucru egal număr*.

— Foarte simplu. Aplici substituția $x = t - \frac{b}{3a}$.

Atunci se obține

$$a\left(t - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(t - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(t - \frac{b}{3a}\right) + d = 0.$$

Dezvoltînd parantezele și reducînd termenii asemenea, rezultă ecuația

$$t^3 + \left[\frac{(3a-2)b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right]t + \frac{2b^3}{9a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0,$$

care este de forma

$$x^3 + px = q.$$

Înainte de a-ți spune versurile, țin să-ți atrag atenția că Tartaglia considera separat cazurile coeficienților cu semne diferite, fiindcă el scria ecuația în așa fel ca toți termenii să fie pozitivi. Așadar, el deosebea următoarele trei tipuri de ecuații:

$$x^3 + px = q; \qquad x^3 = px + q; \qquad x^3 + q = px$$

și avea cîte o poezie pentru fiecare caz. Mie mi-a fost de ajuns una singură, anume prima, corespunzătoare ecuației $x^3 + px = q$. Am să ți-o spun, traducînd alături de versuri formulele corespunzătoare:

„Cînd cubu-adunat cu-ntîia putere
Este egal cu un număr dat, ...$x^3 + px = q$,
Găsește alte două, prin el să difere. ...$t - u = q$,
Cu numerele tale e suficient,
Făcînd produsul, să-l egalezi
Cu cubul treimii din coeficient. $t \cdot u = \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$
Odată aceste socoteli făcute,
Necunoscuta va fi dată
De rădăcinile cubice scăzute. $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$

— Acum să ne încredințăm că *odată aceste socoteli făcute* dăm peste formula lui Cardan!

— Bine, din $t - u = q$ și din $t \cdot u = \frac{p^3}{27}$ se poate deduce $t + u$. Avem $(t - u)^2 = q^2$. Adunînd $4t \cdot u$ în ambii membri și extrăgînd rădăcina pătrată, rezultă

$$t + u = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} = 2\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ca să găsim t și u se formează ecuația de gradul al doilea

$$z^2 - 2\sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}\, z + \frac{p^3}{27} = 0,$$

care are ca rădăcini

$$t = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} - \frac{p^3}{27}},$$

adică

$$t = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ și } u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Așadar,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

care se mai poate scrie încă sub forma

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

— Dar nu-i chiar exact formula lui Cardan. Uite aici în carte $\frac{q}{2}$ are semnul minus, pe cînd în formula pe care am stabilit-o noi $\frac{q}{2}$ e cu semnul plus!

— Dar în cartea ta formula e scrisă sub forma $x^3 + px + q = 0$; or, dacă trecem și în ecuația lui Tartaglia pe q în membrul întîi: $x^3 + px - q = 0$, atunci se schimbă semnul lui q și vei pune în formulă $-\frac{q}{2}$ în loc de $\frac{q}{2}$!

— Într-adevăr, la aceasta nu m-am gîndit. Acum, spune-mi mai departe ce s-a întîmplat după ce Tartaglia i-a dat versurile lui Cardan?

— De ce s-o spun eu și să n-o spuie tot Tartaglia? Ascultă istorisirea lui:

Tartaglia: „Cred că versurile mele sînt destul de clare ca excelența-voastră să înțeleagă totul fără nici un exemplu!“

Cardan: „Aproape că le-am înțeles. Puteți pleca și cînd vă veți întoarce vă voi arăta dacă le-am înțeles".

Tartaglia: „Acum o rog pe excelența-voastră să nu-și calce promisiunea făcută, căci, dacă din nefericire ar fi altfel, vă promit și vă jur că voi imprima de îndată ceva care nu vă va fi tocmai agreabil!"

Cardan: „ Să nu vă îndoiți de cele ce am promis. Dați scrisoarea mea marchizului și drum bun!"

Tartaglia: (în gînd) „Pe legea mea, mă întorc la Veneția și nu mă mai duc la marchiz, fie ce-o fi!"

Aici se termină problema XXXIII, dar din conținutul altor probleme se vede că discuția a continuat. Sînt reproduse o serie de scrisori pe care le scrie Cardan, cerîndu-i fie diverse explicații asupra înțelesului unui vers sau altul, fie soluția unor probleme. Așa s-au scurs cinci ani, cu scrisori din partea lui Cardan, dar și cu informații primite de Tartaglia de la un elev aflat în Milano relativ la cartea de algebră pe care o pregătește Cardan și în care intenționează să introducă ecuația lui Tartaglia. Această veste prinde consistență într-o scrisoare de la Cardan, care-l avertizează ca pe un frate că Zuanne da Coi a sosit din nou la Milano, că acest diavol de domn Zuanne posedă rezolvarea ecuației lui Tartaglia și încă pe aceea a lui Fiore, cu care a stat de vorbă atunci cînd a fost la Veneția. Această scrisoare l-a dezgustat pe Tartaglia într-atît, spune el în *Quesiti*, încît nu mai simte pentru Cardan altă afecțiune decît aceea pentru Zuanne și se hotărăște să-i lase să se descurce între ei fără să mai răspundă la scrisori.

Însă în 1545 apare *Ars magna*, în care Tartaglia citește uluit următoarea notă istorică despre descoperirea rezolvării ecuației cubice: „Bolognezul Scipione del Ferro a găsit, în epoca noastră, *capitolul cubul și lucrul egal cu un număr*[1], lucru într-adevăr frumos și admirabil. Asemenea artă este un dar cu adevărat divin, întrecînd orice subtilitate omenească și splendoarea oricărui artificiu; este o dovadă de valoarea rațiunii, lucru așa de minunat încît oricine îl posedă nu mai poate crede că i-ar mai rămîne ceva neînțeles.

[1] Ecuația $x^3 + px = q$

Prietenul nostru Nicolò Tartaglia din Brescia, fiind într-o dispută cu Anton Maria Fiore, discipolul lui Del Ferro, a găsit el însuși, ca să-l învingă pe acesta în întrecerea amintită, aceeași ecuație și mi-a încredințat-o mie, după insistente cereri și rugăminți..."

— Cred că Tartaglia și-a ieșit din minți citind aceste rînduri!

— Într-adevăr, așa afirmă chiar un matematician care-l cunoștea. El se vede astfel nu numai deposedat de formulă, dar și de prioritate! Aceasta îl face să lase traducerile din Euclid și Arhimede, la care lucra cu sîrg, și în anul următor, deci în 1546, apare, așa după cum îl avertizase pe Cardan, replica lui Tartaglia în acele *Quesiti et inventiones diversae*, carte despre care Ettore Bortolotti spune că „este foarte importantă pentru istoria științei, dar prea nedrept ofensatoare pentru Cardan".

— De ce prea nedrept?

— Pentru că, față de progresul omenirii și al științei, Tartaglia rămîne mai vinovat decît Cardan. El a păstrat pentru el o descoperire, considerată atunci echivalentă cu un miracol, mai bine de 10 ani. Și cine știe cîtă vreme ar fi rămas ea necunoscută fără intervenția lui Cardan, fiindcă *Tratatul general* pe care Tartaglia a început să-l publice în 1556 și unde intenționa să discute toate rezultatele obținute de el în domeniul algebrei nu l-a mai putut termina, căci moare în 1559, după ce a tipărit numai volumul despre aritmetică. Pînă atunci însă va avea de înfruntat un nou duel matematic, cu Ferrari, elevul lui Cardan, care reușise să rezolve ecuația de gradul al patrulea.

— Așadar, de data aceasta un duel serios, cu un adversar demn de Tartaglia!

— O, da! Și aș vrea să-ți atrag atenția că Ludovico Ferrari este un alt exemplu de forța cu care talentul matematic, cuibărit într-o ființă omenească, știe să-și facă loc și să izbucnească la suprafață. Ca și Tartaglia, Ludovico Ferrari fusese un copil sărac și n-a avut cum învăța carte. Adus de tatăl lui la Milano, intră la vîrsta de 15 ani în serviciul lui Cardan. Acesta remarcă și-i apreciază inteligența, primindu-l printre elevii săi. Astfel devine curînd nu numai

cel mai bun elev al lui Cardan, dar totodată ajutorul și colaboratorul la operele sale matematice. La 18 ani, adică în trei ani, el ajunge să țină cursuri publice de matematici care trezesc admirația auditorilor și totodată să găsească soluția ecuației de gradul al patrulea, provocîndu-l la un duel matematic pe Zuanne da Coi, care, după cum am văzut, revine la Milano. La vîrsta de 25 de ani îl provoacă în alt duel matematic pe renumitul și invincibilul Tartaglia.

— Așadar, tot bunului nostru amic Zuanne i se datorește și descoperirea rezolvării ecuației de gradul al patrulea, după cum, indirect, el l-a determinat pe Cardan la trădarea ecuației de gradul al treilea!

— Într-adevăr! Acest Maestro Zuanne avea talentul să născocească probleme care puneau în încurcătură mințile cele mai remarcabile ale timpului! Așa s-a întîmplat să se ajungă la ecuația de gradul al patrulea. Iată ce povestește mai întîi Cardan în *Ars magna* și apoi peste un an cu multe amănunte, Tartaglia în *Quesiti*:

Cardan: Problema V, cap. 39: „Să se împartă numărul 10 în trei părți care să fie în proporție continuă, iar produsul dintre primul și al doilea număr să fie 6".

Această problemă mi-a fost propusă de Johannes Colla[1], spunîndu-mi că nu o poate rezolva; eu însă am afirmat că ea se poate rezolva, deși nu știam cum, și am dat-o lui Ferrarius, care a descoperit aceasta"[2].

Tartaglia povestește și el despre această ecuație, spunînd că ea i-a fost trimisă de către Zuanne în anul 1535 cu alte date, și anume 20 în loc de 10 și 8 în loc de 6. El stabilește ecuația corespunzătoare problemei astfel. Să notăm cele trei părți cu $\frac{x}{y}$, x, xy; avem relațiile

$$\frac{x}{y} + x + xy = 20,$$

$$\frac{x^2}{y} = 8,$$

[1] Același Zuanne cu numele scris sub formă latinizată, căci și *Ars Magna* este scrisă în latinește.

[2] Adică rezolvarea ecuației de gradul al patrulea.

de unde ecuația

$$x^4 + 8x^2 - 160x + 64 = 0.$$

Tot în *Quesiti*, Tartaglia reproduce o scrisoare trimisă în anul 1540 de Cardan, în care acesta îl roagă să-i dea soluția problemei de mai sus, problemă pe care Zuanne i-a propus-o ca o provocare, fiindcă altfel ar fi dezonorat.

Și, într-adevăr, desperat că nu primește răspuns, Cardan îi sugerează lui Ferrari calea pe care ar trebui să urmeze ca să poată găsi soluția. Și fiindcă ei aveau atunci la îndemînă metoda de rezolvare a ecuației cubice pe care le-o arătase Tartaglia, Ferrari a reușit să rezolve ecuația de gradul al patrulea. Astfel, duelul la care fusese provocat Cardan a fost susținut de Ferrari ca elev al lui Cardan și acesta a fost declarat învingător. S-a remarcat atunci că Ferrari și-a învins adversarul *nu dovedind că nici acela nu știa să rezolve problema, ci, contra oricăror așteptări, rezolvînd-o în mod efectiv*.

Pe Tartaglia l-a provocat printr-un afiș — un *cartello*, tipărit la Milano în 1547. Asemenea afișe circulau din mînă în mînă, și astfel nu numai matematicienii, ci și marele public se simțea atras spre acele discuții științifice. G. Libri, vestit șoarece de bibliotecă, observă că „în secolul al XV-lea toate spiritele erau îndreptate spre erudiție, apoi a avut loc un fel de a doua Renaștere, mai puțin energică și mai puțin spontană decît prima, dar mai savantă, și spre mijlocul secolului al XVI-lea toate spiritele poetice, pasionate de formă și de frumos, s-au îndreptat încetul cu încetul către știință. O mulțime de iluștri istorici, poeți, artiști celebri, ascultînd de tendința generală a epocii, s-au dedat cu ardoare științei".

În afiș Ferrari își arăta indignarea față de injuriile aduse de Tartaglia lui Cardan și, în consecință, îi cere să discute față de judecători problemele de geometrie, aritmetică și din toate celelalte discipline ce se vor ivi, cînd îi va arăta greșelile pe care le-a găsit el în *Quesiti*, declarînd că e gata să depună o sumă de bani, în mîini sigure, care să revie învingătorului.

La rîndul lui, Tartaglia a răspuns în același mod din Veneția, arătînd că e gata să accepte această provocare, deși nu are nici un fel de aversiune contra lui Ferrari. O face considerîndu-l ca vocea lui Cardan și e de acord să depună aceeași sumă destinată învingătorului. Discuțiile tipărite în afișe au continuat pînă la șase replici de partea fiecăruia. Aceste afișe sînt de altfel singurele lucrări scrise care au rămas de pe urma lui Ferrari, „primul dintre toți în probleme matematice", scrie Cardan, fiindcă el a murit, probabil otrăvit, la 43 de ani.

— Și care a fost rezultatul duelului?

— Am să-l las pe Tartaglia să spună ce s-a întîmplat. O face în ultima lui carte, *Tratatul general*, tipărit în 1556. „Dorind să proclam public aceste falsități (se referă la răspunsurile cuprinse în primele 4 afișe ale lui Ferrari —*Fl.C.*) și aflîndu-mă în Brescia în apropierea Milanului, le-am trimis amîndorura un afiș imprimat (e al cincilea al lui Tartaglia — *Fl. C.*), invitîndu-l să vie vinerea viitoare 10 august 1458 în grădina zisă a fraților Zoccolanti, unde am să expun public combaterea soluțiilor lor. Cardan, ca să nu se afle la examen, a plecat în grabă din Milano, iar la ziua fixată a venit la întîlnire numai Ferrari, întovărășit de o mulțime de prieteni și de mulți alții. Eu eram numai cu fratele meu, pe care-l adusesem cu mine din Brescia. M-am prezentat în fața mulțimii și am prezentat pe scurt subiectul discuției și cauza pentru care am venit la Milano. Cînd am vrut să intru în subiectul problemelor pe care aveam să le combat, m-au întrerupt timp de două ore prin cuvinte și gesturi, sub pretextul că ar trebui întîi aleși acolo pe loc judecători, toți prieteni de-ai lui Ferrari, iar mie complet necunoscuți. N-am vrut să admit această viclenie, susținînd că judecătorii trebuie să fie tot auditoriul, precum și toți cei ce vor citi cele ce am de spus cînd le voi imprima. Atunci m-au lăsat să vorbesc și, ca să nu plictisesc auditoriul, n-am început cu problemele mai greoaie din teoria numerelor și din geometrie, ci cu soluția unei probleme din geografia lui Ptolemeu, constrîngîndu-l pe Ferrari să recunoască public că s-a înșelat. Vrînd să continuu, toți au început să strige că acum trebuie să vorbesc despre propri-

ile mele soluții, obținute în trei zile, ale celor 31 de probleme ce mi-au fost propuse. Am obiectat că întîi vreau să termin cu problemele pe care am să le combat și că apoi voi expune soluțiile mele. Nu m-au lăsat însă să mai vorbesc, orice argument am adus și au dat cuvîntul lui Ferrari, care a început prin a zice că eu n-am putut rezolva problema a patra din Vitruviu și s-a întins cu aceasta pînă la vremea mesei, cînd toți cei de față au plecat".

Așa s-a terminat provocarea! Tartaglia s-a întors la Brescia pe un drum ocolit, temîndu-se să nu fie bătut.

— Săracul Tartaglia!

— Nu, n-ai de ce-l compătimi, căci el rămîne o figură remarcabilă în istoria științelor matematice. Îmi pare rău că nu pot să vorbesc de el mai pe-ndelete și că ți l-am arătat numai sub un singur aspect, dar e tîrziu și aș vrea să-mi termin problema care am început-o cînd ne-am așezat la taclale.

— Ai dreptate. Voiai să-mi dai exemple de talente matematice care răsar impetuos și se dezvoltă singure, aș spune, cu îndărătnicie. Luîndu-l ca exemplu pe Tartaglia, te-ai legat de rezolvarea ecuației cubice și de acolo, ca să mi-l prezinți pe Ferrari, ai trecut la rezolvarea ecuației de gradul al patrulea prin radicali, măcar că nu mi-ai arătat cum se stabilește și această formulă. Probabil fiindcă Ferrari nu și-a pus regula sa în versuri?

— Da, nici el și nici Cardan, care a expus regula lui Ferrari în *Ars magna*! Însă nu-i nici o pagubă, fiindcă această regulă o poți afla în cartea aceea de algebră la care ai recurs ca să controlezi veracitatea formulei stabilite de Tartaglia. Ceea ce este important nu-i formula, ci faptul în sine, care îți arată că rădăcinile ecuației de gradul al patrulea pot fi găsite printr-un număr finit de operații algebrice făcute cu coeficienții ei.

— Da, ai dreptate. Judecînd după formula ecuației de gradul al treilea, bănuiesc că rădăcinile ecuației de gradul al patrulea se găsesc aplicînd formula, deci după ce înlocuiesc valorile coeficienților fac niște adunări-scăderi, extrageri de rădăcini cubice, vreo cîteva extrageri de rădăcini pătrate, nu-i așa?

— Exact. În total faci vreo 12 operații algebrice între cei cinci coeficienți ai ecuației de gradul al patrulea, ca să stabilești cele patru rădăcini ale ecuației.

— Așadar, după cîte înțeleg eu acum, accentul trebuie pus pe faptul că rădăcinile oricărei ecuații algebrice de gradul al doilea, al treilea și al patrulea au fost determinate printr-un număr finit de operații asupra coeficienților lor?

— Desigur, și *numai pe aceasta*, căci altfel se pot stabili metode, de altă natură, care să detecteze rădăcinile unei ecuații date.

— Acum am înțeles. Iartă-mi întreruperea și înnoadă firul.

— Am de gînd să-ți mai dau alte exemple de asemenea izbucniri ale talentului matematic, vorbindu-ți de încă doi tineri matematicieni care au desăvîrșit tot atît de strălucitor teoria rezolvării ecuațiilor algebrice prin radicali, ca și cei doi precursori ai acestei teorii: Tartaglia și Ferrari. Trebuie să știi că, după succesul rezolvării ecuațiilor cubice și bipătrate prin radicali, matematicienii sperau să mai stabilească și alte formule cu radicali prin care să se exprime rădăcinile ecuației de gradul al cincilea și al șaselea sau chiar ale unei ecuații de grad oarecare n.

— Era o pretenție firească o dată ce matematicienii din secolul al XVI-lea reușiseră să depășească nivelul la care ajunseseră celebrii și atît de mult admirații matematicieni greci!

— Pe cine n-a tentat această problemă? Tschirnhaus era convins că a găsit cheia, folosind o metodă de transformare a ecuației date în alta mai simplă, care se rezolva printr-o ecuație de un grad mai mic. Metoda se aplică admirabil pînă la ecuația de gradul al patrulea, dar, cînd s-o aplice la ecuația de gradul al cincilea, ecuația *mai simplă* pe care avea s-o rezolve devenea deodată de gradul al șaselea în loc de gradul al patrulea, cum se aștepta el! Aceasta a fost în secolul al XVII-lea. În secolul al XVIII-lea, problema l-a subjugat pe Euler 17 ani neîntrerupt, fără să fi putut stabili vreun rezultat pozitiv. La sfîrșitul aceluiași secol publică și Lagrange cercetările sale asupra rezolvării ecuațiilor algebrice prin radicali. Le studiase îndelung, ajungînd la concluzii care vor

fi speculate mai tirziu cu succes de alții, dar el nu obține nici un rezultat pozitiv și se ferește de a trage concluzii. „Deși rezolvarea ecuațiilor algebrice de gradul al cincilea nu-i realizată — spune el — nimic nu demonstrează imposibilitatea unei asemenea rezolvări".

Pornind de la aceste eșecuri, mulți matematicieni afirmau că ecuația de gradul al cincilea e imposibil de rezolvat prin radicali. O prevăzuse însuși Leibniz la sfîrșitul secolului al XVII-lea, o repetase și Gauss, viitorul *princeps* al matematicilor, în teza lui de doctorat din ultimul an al secolului al XVIII-lea, dar, fiindcă de nicăieri nu se arăta o dovadă într-un fel sau altul, nimeni nu știa ce să creadă. Îndoiala o exprimase, după cum ai văzut, foarte limpede Lagrange. Și acum ascultă! În Norvegia, într-un sat aproape de Christiania, trăia un pastor, pe nume Abel, om sărac, care avea 7 copii. Pe al doilea îl chema *Niels* și s-a născut în 1802. A învățat la școală ca și frații lui, și pînă la 15 ani nu s-a deosebit prea mult de ceilalți colegi ai săi de școală și de joacă. Dar atunci i s-a schimbat profesorul, despre care se spunea că era o brută de om, și în locul lui vine un profesor blajin, cult și îndrăgostit de matematici, pe nume Holmboë. Ce-a făcut acesta? Cum l-a remarcat pe Niels sau, poate invers, cum s-a apropiat Niels de el? Fapt este că la 16 ani Niels *devora* cărțile de matematici, nu acelea pentru școlari, ci *operele originale*, moderne atunci, ale lui Newton, Euler, Lagrange, Gauss. Te întreb acum și eu pe tine: cum îți explici că un copil de 15 ani, care încasa bătăi pentru că uneori nu-și făcea lecțiile, care habar n-avea de existența marelor probleme ce frămîntau mintea celor mai versați matematicieni să fie tentat, *să îndrăznească*, aș spune mai degrabă, să citească asemenea opere, pe care mulți dintre cei calificați să le citească se temeau să le deschidă? Cum a *depășit el dintr-o dată* toate obstacolele și a pătruns *de la început în miezul problemelor* ce i se înfățișau în acele cărți? Și, mai ales, cum îți explici că o făcea *cu cea mai adîncă plăcere*, nesilit și nici îndemnat de cineva?

Peste cîțiva ani, fiind întrebat cum a putut ajunge așa de repede la cea mai înaltă treaptă a matematicilor, a răspuns: „Studiind pe maeștri și nu pe elevii lor".

— Desigur că Holmboë a avut un rol însemnat. El trebuie să-i fi procurat cărțile și tot el trebuie să-i fi dat primele explicații!

— Nici vorbă că așa a fost; de altfel au devenit și prieteni. Știi însă foarte bine — doar de la asta ne-am și luat azi la vorbă — că nu-i de ajuns să-i dai unui tînăr cărțile și nici să-i vorbești despre ele cu pasiune! Dacă *nu le dorește*, dar e destul de politicos, s-ar putea întîmpla să-ți asculte recomandarea cu oarecare răbdare, însă oricum, te va privi cu compătimire și de citit tot nu le va citi. Elevul Abel citea singur aceste opere, mut de admirație, dar și cu spiritul critic al unui confrate! Observînd lacunele, el se încumetă să completeze demonstrațiile care erau mai puțin riguroase sau nu aveau chezășia caracterului general pe care-l afirmau!

Sămînța încolțise, dar, ca să iasă la lumină, mugurul avea să ridice un bulgăre greu de pămînt. Nu împlinise nici 18 ani cînd moare tatăl lui și îi revine sarcina să îngrijească de mamă și de cei 6 copii! În loc să-și continue studiile, începe să dea lecții de matematici. Țara era pe atunci foarte sărăcită în urma războaielor pe care le purtase, așa că munca lui Niels Abel era istovitoare și prost plătită. În anul următor se înscrie la Universitatea din Christiania și totodată începe să atace problemele nerezolvate încă, printre care era și problema rezolvării ecuațiilor algebrice. Avea 19 ani și-i s-a părut că a reușit să rezolve ecuația de gradul al cincilea. Nici unul dintre profesorii lui de la Universitate nu au putut să-i urmărească calculele sau ideile. De aceea ei trimit demonstrația lui Abel unui erudit profesor din Copenhaga. Nici acesta nu se pronunță direct asupra ei, scriind că el o consideră ca pe o problemă sterilă, însă își exprimă admirația față de talentul lui Abel și dorința ca forțele lui să se îndrepte spre un subiect puțin cercetat atunci în analiză, părînd foarte dificil, și anume funcțiile eliptice. Într-o formă figurată el conclude asupra sugestiilor sale astfel: „Cu dispozițiile pe care le dovedește, cercetătorul va descoperi strîmtorile lui Magelan, conducînd spre vastele regiuni ale unui singur și imens ocean analitic".

— Și așa s-a întîmplat?

— Da, mai mult chiar, pentru că studiul pe care l-a întreprins Abel a depășit pe acela al funcțiilor eliptice. Adevărată însă a rămas prevestirea cu *strîmtorile lui Magelan*. Legendre, care cunoștea bine problema, căci se ocupase ani întregi de funcțiile eliptice, considera această lucrare ca „monumentul lui Abel care desfide timpul". Însă n-am apucat să-ți termin povestea lui Abel în legătură cu ecuația de gradul al cincilea.

— După felul cum mi-ai spus, am înțeles că a greșit demonstrația.

— Da; fără să-i arate nimeni, Abel a observat singur greșeala și atunci și-a dat seama de imposibilitatea rezolvării prin radicali a ecuației de gradul al cincilea. Reface totul și el e primul matematician care reușește să demonstreze *imposibilitatea rezolvării* ecuației de gradul al cincilea prin radicali. Cum a realizat el ceea ce o minte ascuțită, matură și așa de versată ca a lui Euler sau a lui Lagrange nu a putut-o face? Iată cum încearcă s-o explice cu înțelepciune de om bătrîn, la o vîrstă atît de fragedă, chiar Abel: „Se căuta rezolvarea ecuațiilor fără să se știe dacă aceasta era posibilă. Pe această cale s-ar fi putut ajunge la rezolvare, cu toate că aceasta nu era de loc sigur. Dar dacă, din nefericire, rezolvarea ar fi imposibilă, ea ar fi putut să fie căutată în veci fără să se găsească. Pentru a ajunge cu siguranță la un rezultat trebuie aleasă altă cale... În loc să se caute o relație despre care nu se știe dacă există sau nu, trebuie să ne întrebăm dacă o asemenea relație este în adevăr posibilă..."

— Așadar, Abel a stabilit ceea ce timp de aproape 300 de ani nimeni nu putuse stabili?

— Da. El arată că e imposibil să existe o expresie în radicali formată din coeficienții unei ecuații de gradul al cincilea (sau chiar mai mare decît 5), expresie care să fie o rădăcină a ecuației respective. Abel publică această demonstrație în 1824 în Norvegia, cînd avea 22 de ani. În

1826, adică peste doi ani, lucrarea apare într-o revistă de matematici ce se tipărea la Berlin, iar peste alți trei ani, în 1829, Abel moare. Pentru cele ce-am vrut să-ți demonstrez e de ajuns atît. Nu vreau să-ți vorbesc nimic despre deziluziile suferite de el în Franța, despre memoriul rătăcit de Academia de științe din Paris și publicat abia după moartea lui, despre durerea de a nu fi fost înțeles și apreciat decît de foarte puțini matematicieni. Abel se stinge acasă la el în Norvegia, la 27 de ani, sărac, dar lăsînd în urma lui o moștenire care, după cum a spus matematicianul francez Hermite, „dă de lucru generațiilor viitoare pe nu mai puțin de 500 de ani".

Și acum hai să-ți mai vorbesc despre Evariste Galois, care moare, mai înainte de a fi împlinit vîrsta de 21 de ani, într-un duel stupid!

— Talentul matematic s-a dezvoltat, desigur, mult mai devreme la Galois decît la Abel, dacă, murind numai la 21 de ani, a putut lăsa ceva prin care să fi devenit nemuritor.

— A, nu! Ca și Abel, el nu a arătat aptitudini speciale pentru matematici pînă la 15 ani. A fost un elev obișnuit, bun, spun profesorii, și a obținut chiar o mențiune specială la un concurs de *limba greacă*. Însă la 15 ani rămîne repetent! Repetent fiind, avea și dreptul să urmeze cursurile speciale de matematici pregătitoare ce se țineau în școală. Și sămînța a încolțit dintr-o dată. El citise atunci geometria lui Legendre de la un capăt la altul, ca pe un roman. Limbajul pur și limpede al raționamentului matematic folosit cu talent de Legendre l-a făcut să se simtă deodată în largul lui. Astfel, prin această carte se trezește în el gustul pentru operele originale și către ele se îndreaptă. Învață algebra din opera lui Lagrange și comite, ca și Abel, eroarea de a crede că a rezolvat ecuația de gradul al cincilea. Își recunoaște eroarea și caută s-o îndrepte simțindu-se atras de teoria ecuațiilor algebrice. În același timp Galois se hotărăște să dea concurs pentru a intra la

Școala politehnică, considerată pe atunci ca *mama matematicienilor francezi*. Spera că acolo talentul lui matematic se putea dezvolta în voie. Dar Galois nu reușește la acest examen și revine la colegiul în care învățase, înscriindu-se la clasa de matematici speciale a profesorului Louis-Paul Richard. Acest profesor admirabil a fost singurul, poate, care a înțeles geniul lui Galois, „Abelul Franței", cum l-a numit el cu drept cuvînt de altfel, căci între preocupările acestor doi tineri a existat un anumit paralelism. L. P. Richard i-a urmărit dezvoltarea cu aceeași ardoare ca și Holmboë pe a lui Abel. La 18 ani Galois publică prima sa lucrare originală, despre fracțiile continue, lăsînd marea sa descoperire asupra rezolvării ecuațiilor algebrice, la care lucrase și obținuse rezultate remarcabile ca s-o prezinte Academiei de științe din Paris. Încurajat de profesorul Richard, Galois se prezintă din nou anul următor la concursul pentru Școala politehnică și din nou nu reușește.

— Cum se poate? Examinatorii erau bătuți cu leuca?

— S-a discutat atît de mult și în atîtea feluri despre acest examen, că nu are rost să-l mai răscolim. Fapt este că Galois a suferit o grozavă lovitură sufletească, ca o frunză grea și înghețată care apasă pămîntul în locul prin care mugurașul abia răsărit își caută loc să iasă la aer și la soare! Și nu mult după aceea se sinucide tatăl său, pe care-l iubea mult. Rămas fără nici un sprijin material, se decide să intre în Școala normală. Aici compune lucrările matematice pe care le prezintă într-un memoriu Academiei de științe, vrînd să concureze la marele premiu de matematici. Dar memoriul a fost rătăcit de secretarul Academiei. Îl luase la el acasă ca să-l citească, însă între timp a murit! Cînd încep primele manifestări ale revoluției, Galois, care simpatiza cu saint-simoniștii, și-a arătat de îndată părerile lui republicane, manifestînd activ pentru revoluție. Din această cauză este eliminat în decembrie 1830 din școală. Ca să nu moară de foame, deschide un curs particular de algebră

sau erioară și iar ghinion! Tot dintr-o neînțelegere a atitudinii sale corecte de revoluționar, este închis, fiind învinuit că a toastat pentru rege! Din închisoare, adresează în septembrie 1831 un nou memoriu Academiei de științe. În introducere își descarcă durerea. „Dacă ar fi să dedic ceva mai-marilor lumii sau mai-marilor oameni de știință — scrie el — jur că nu despre recunoștință ar fi vorba. Unora le datorez întîrzierea cu care dau publicității două memorii, iar altora faptul de a fi scris totul în închisoare, socotit pe nedrept ca un loc de reculegere..."

— Cu teoria ecuațiilor algebrice Galois a mers mai departe decît Abel?

— Galois a pus probleme noi și totodată a dat o formă definitivă și generală problemei rezolvării ecuațiilor algebrice, constituind o teorie cu totul nouă și cu foarte largi aplicații în matematica modernă, *teoria grupurilor*. Înțelegînd urmările revoluționare pentru matematici ale ideilor sale, Galois termină memoriul din închisoare cu următoarele observații, care parcă nu-ți vine să crezi că le-a scris un tînăr de 20 de ani: „Nu e de mirare că, tratînd despre subiecte atît de noi, încumetîndu-mă să pornesc pe o cale atît de neobișnuită, adesea am întîlnit dificultăți pe care nu le-am putut învinge: De aceea în ambele memorii, și mai ales în cel de-al doilea, care este mai recent, se va întîlni adesea formula «nu știu» ... Dar în ziua în care concurența, adică egoismul, va înceta de a domni în știință, cînd oamenii se vor asocia pentru a studia în comun, atunci se vor publica observații noi cu mențiunea «mai departe nu știu".

— Dar cu duelul cum a fost?

— Motivele nu se cunosc. El scrie: „Mor victimă a unei nemernice cochete. Viața mea se stinge într-o intrigă jalnică. Oh! de ce să mori pentru atît de puțin, să mori pentru un lucru atît de vrednic de dispreț". A fost o poveste tristă. Fratelui său îi spunea: „Nu plînge, am nevoie de tot curajul meu ca să pot muri la douăzeci de ani". Noaptea de dinain-

tea duelului și-a petrecut-o scriind trei scrisori: una către toți republicanii, alta către doi colegi și a treia către prietenul lui, Auguste Chevalier, în care inserează ultimele lui gînduri matematice. Pe masă se aflau și ultimele lui două lucrări, pe care desigur că le-a recitit, adăugînd: „Este ceva de completat în această demonstrație. N-am timp acum!". Dar nu-i desperat: „Mai tîrziu nădăjduiesc că vor veni oameni care vor considera util să descifreze toate aceste lucruri încurcate". Așa termină el scrisoarea către prietenul său Auguste Chevalier. Termin și eu. Vezi acum de ce ți-am dat dreptate ție. După ce a încolțit, mugurul se luptă singur și, dacă-i destul de puternic, sfărîmă crusta și izbucnește la lumină. Iar dacă nu-i, nu-i!

CUPRINS

Problema despre taurii Soarelui sau povestea unei dihonii între matematicieni, stîrnită de un dramaturg 7
Problema florentină sau povestea unui înstrăinat..... 70
Problema perspectivei sau povestea colaborării dintre geometrie şi pictură 126
Tăietura de aur sau problema unei unităţi de măsură pentru frumos 157
Teorema celor patru culori sau o problemă în legătură cu hărţile 200
Cum izbucneşte talentul matematic sau rezolvarea ecuaţiilor algebrice de gradul al treilea şi mai mare ca trei..... 236

Redactor responsabil :
PETRE DUDCOVSCHI
Tehnoredactor : ŞTEFANIA MIHAI

Dat la culeș 30.09.1967. Bun de tipar 09.02.1968. Apărut 1968. Comanda nr. 7723. Tiraj 24.140. Hîrtie Tipar înalt B de 63 g/m² 540×760/16. Coli editoriale 8. Coli de tipar 8,5. Planșe 3. A. 12 287 C.Z. pentru bibliotecile mici 8 R—96.

Tiparul executat sub comanda nr. 70.676 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii" str. Piața Scînteii nr. 1. București, Republica Socialistă România

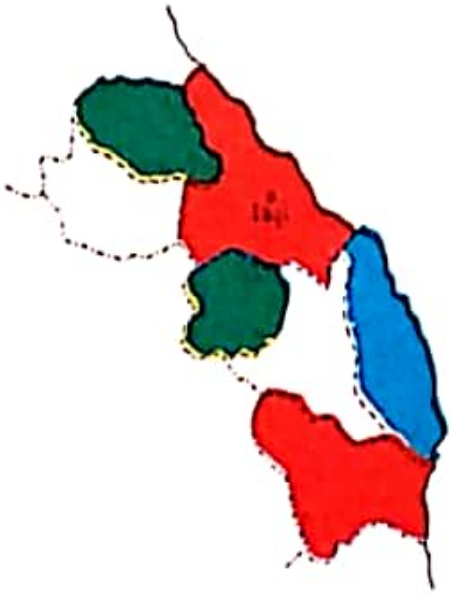


Fig. 51

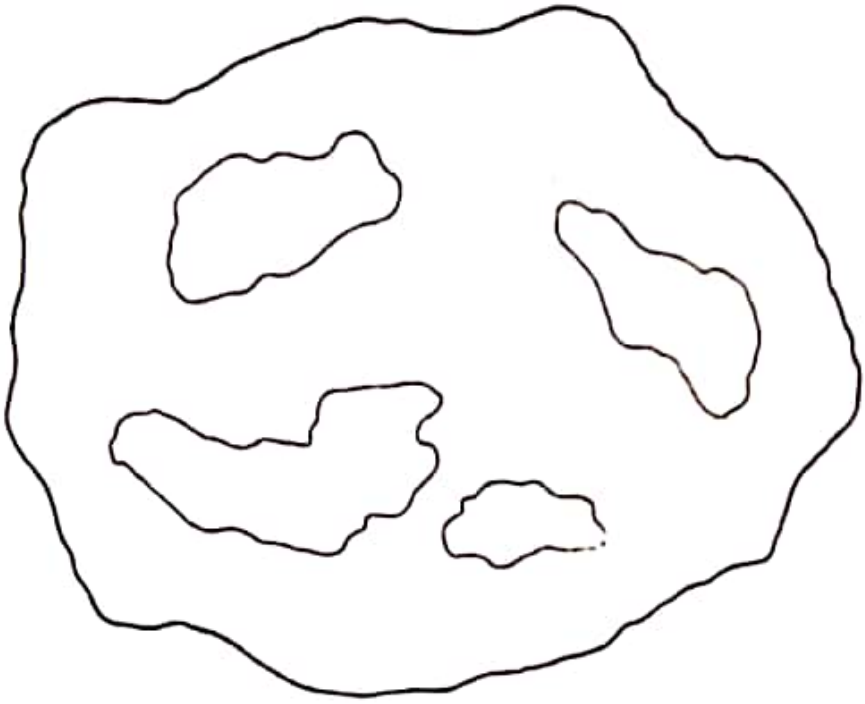


Fig. 52

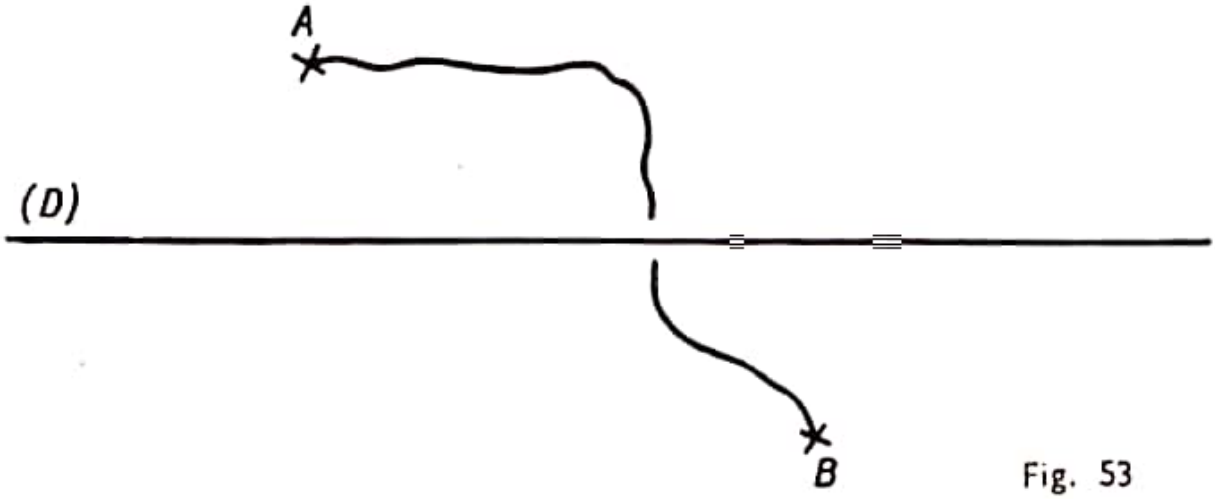


Fig. 53

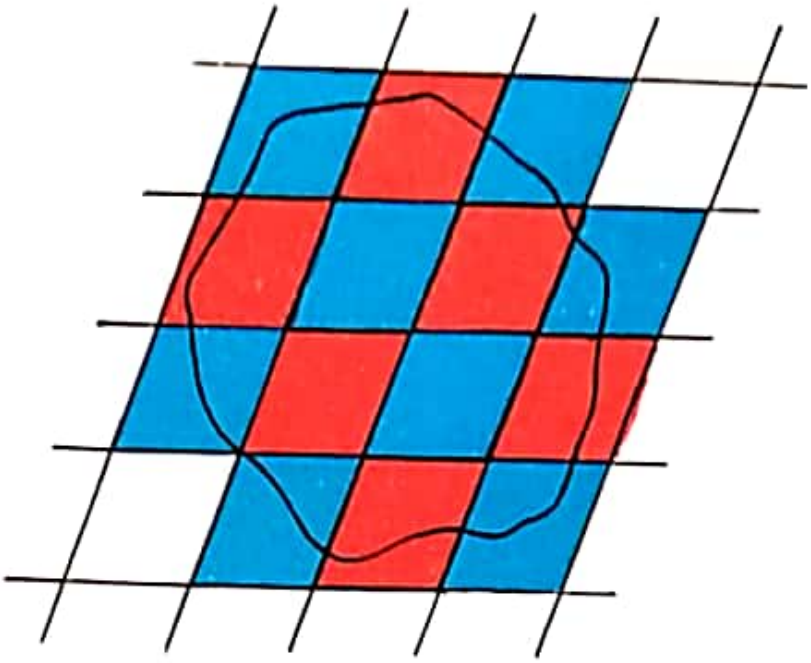


Fig. 54

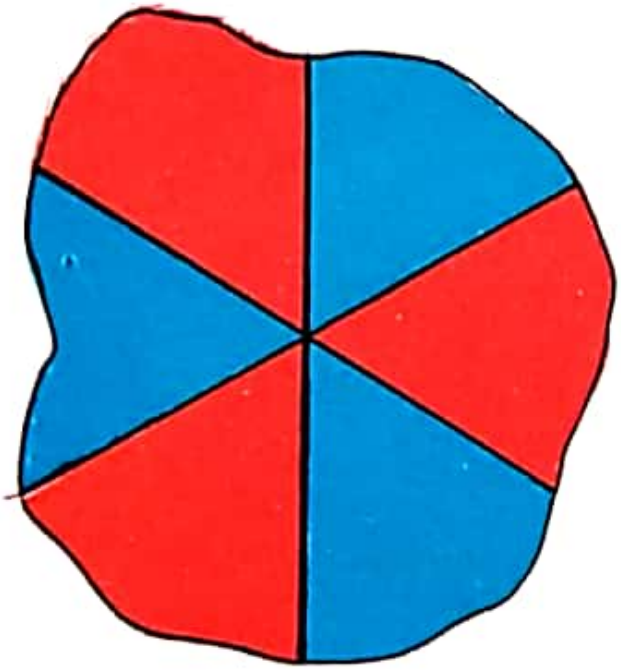


Fig. 55

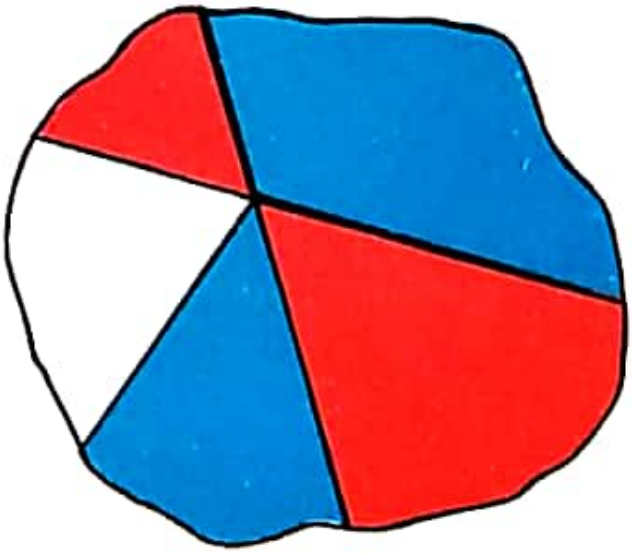
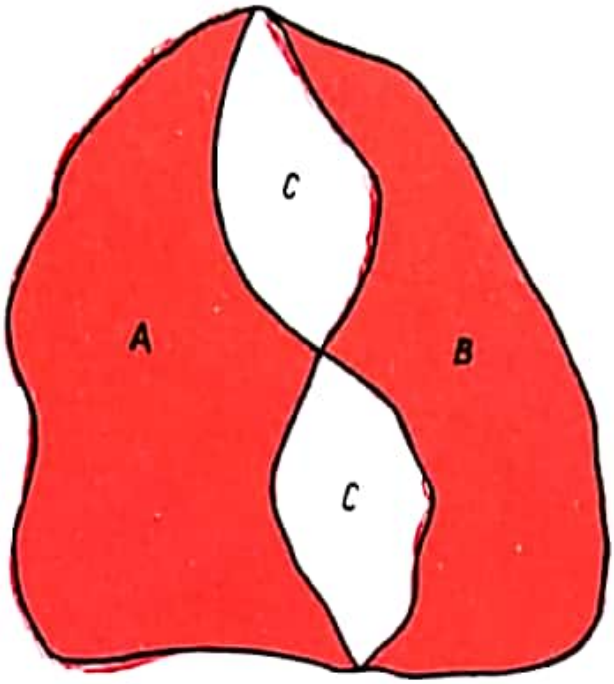


Fig. 56

Fig. 57



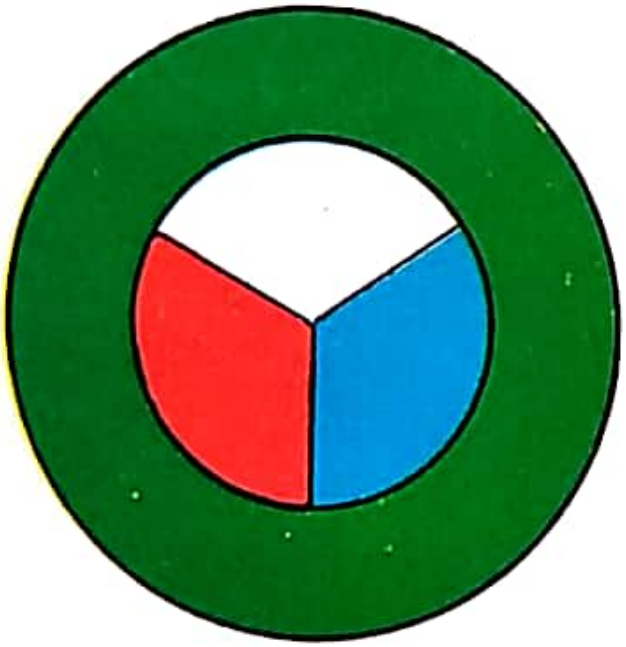
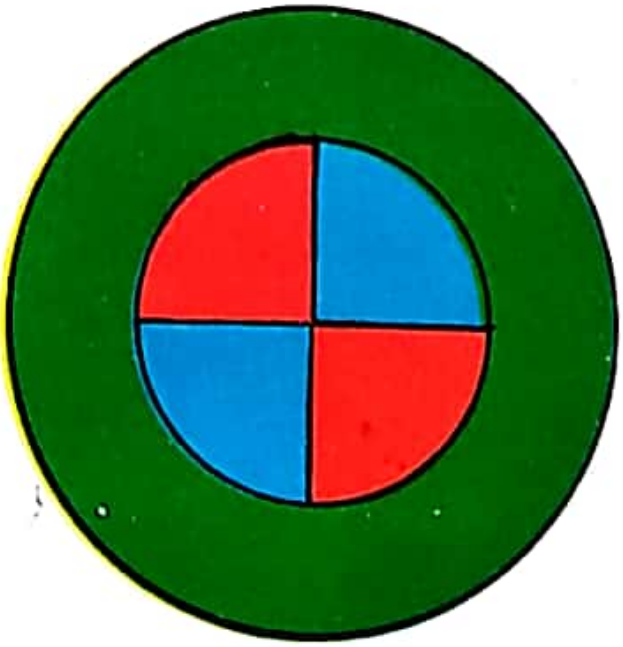
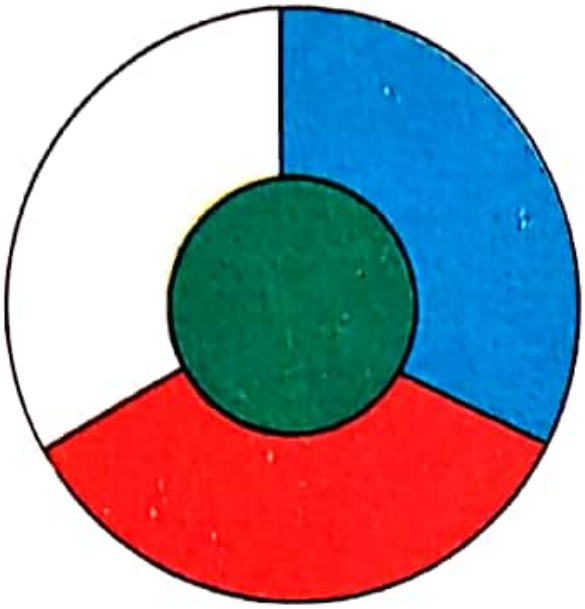


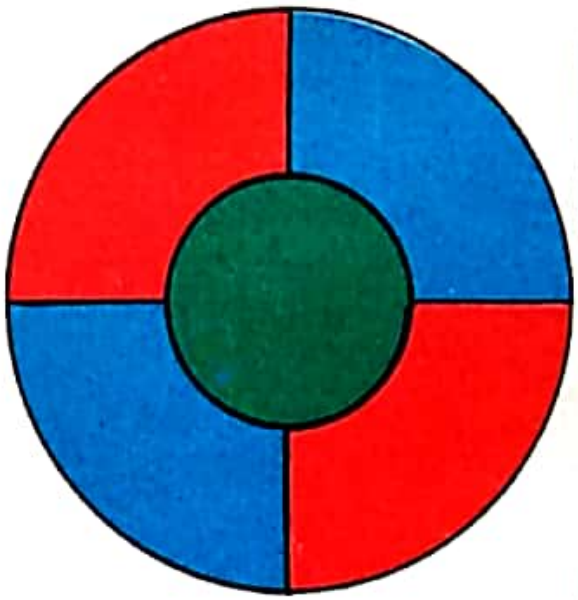
Fig. 58

Fig- 59

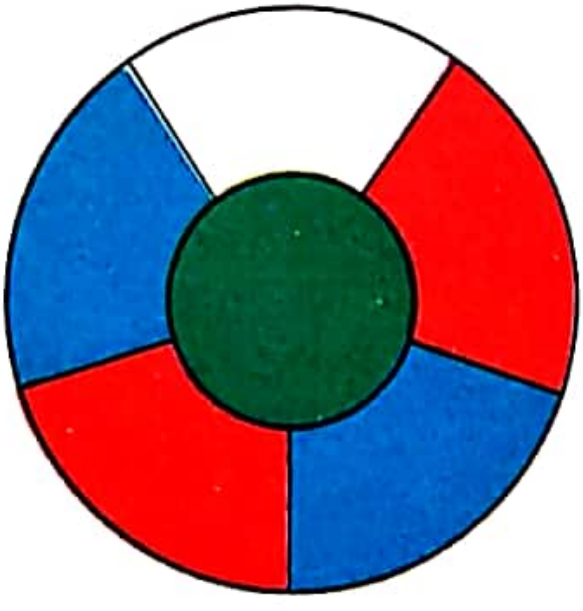




a



b



c

Fig. 60

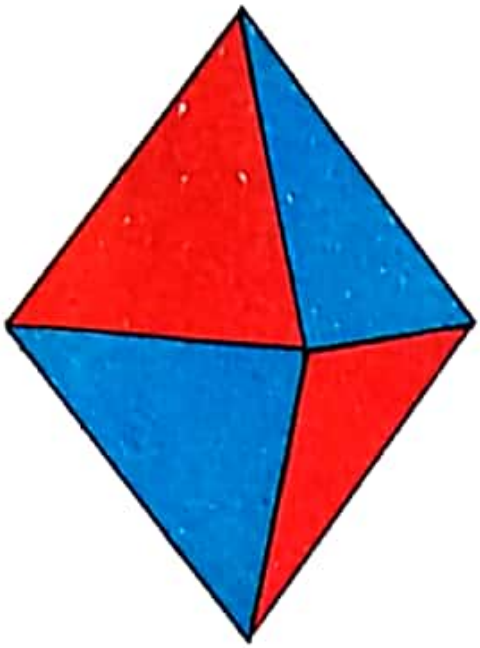


Fig. 61

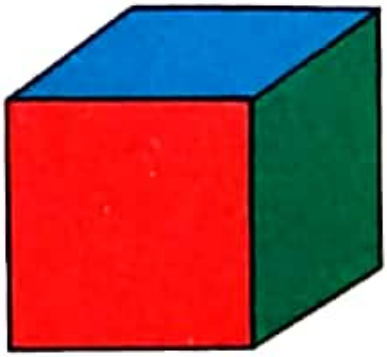


Fig. 62

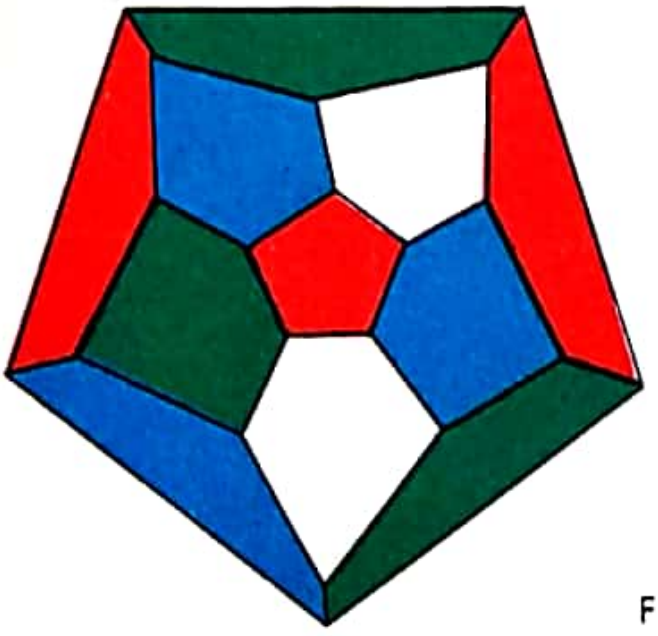


Fig. 63

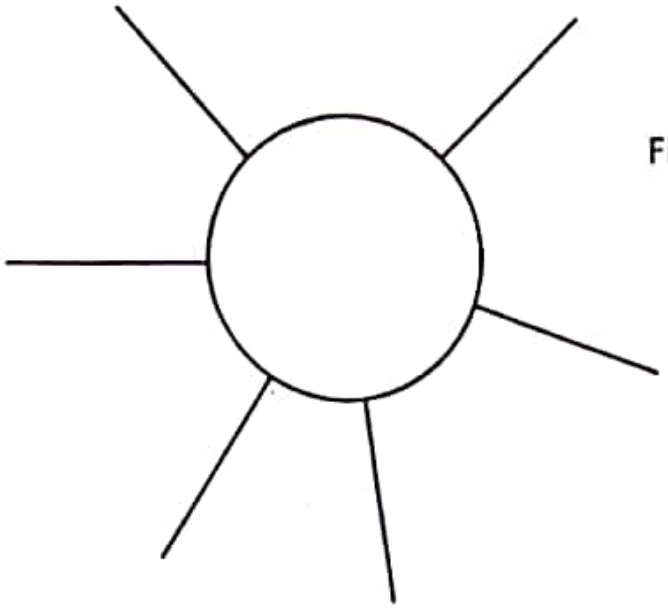


Fig. 64 a

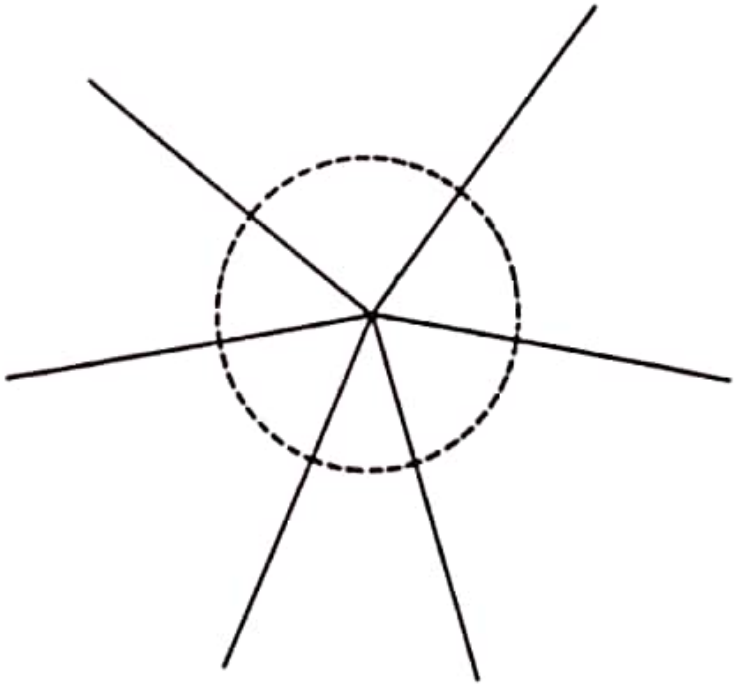


Fig. 64 b

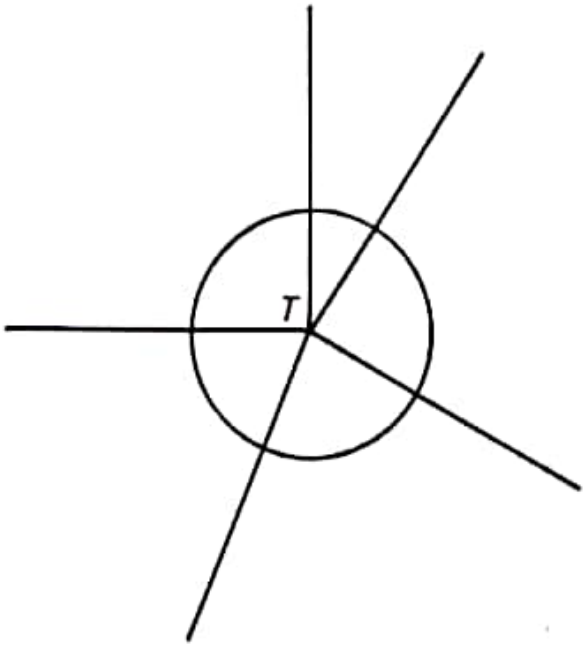


Fig. 65

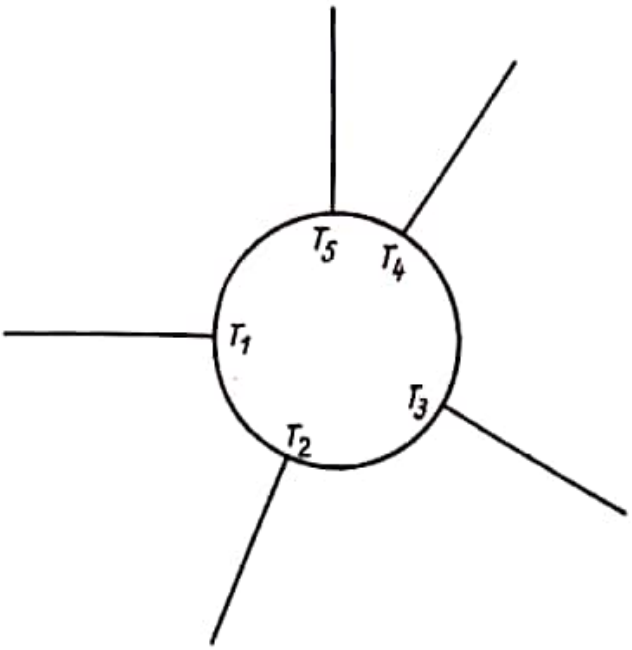


Fig. 66

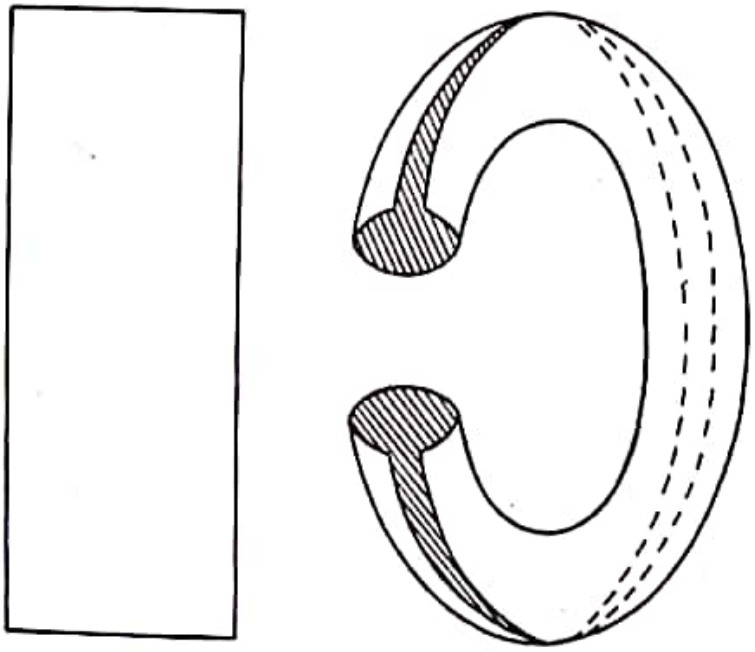


Fig. 67

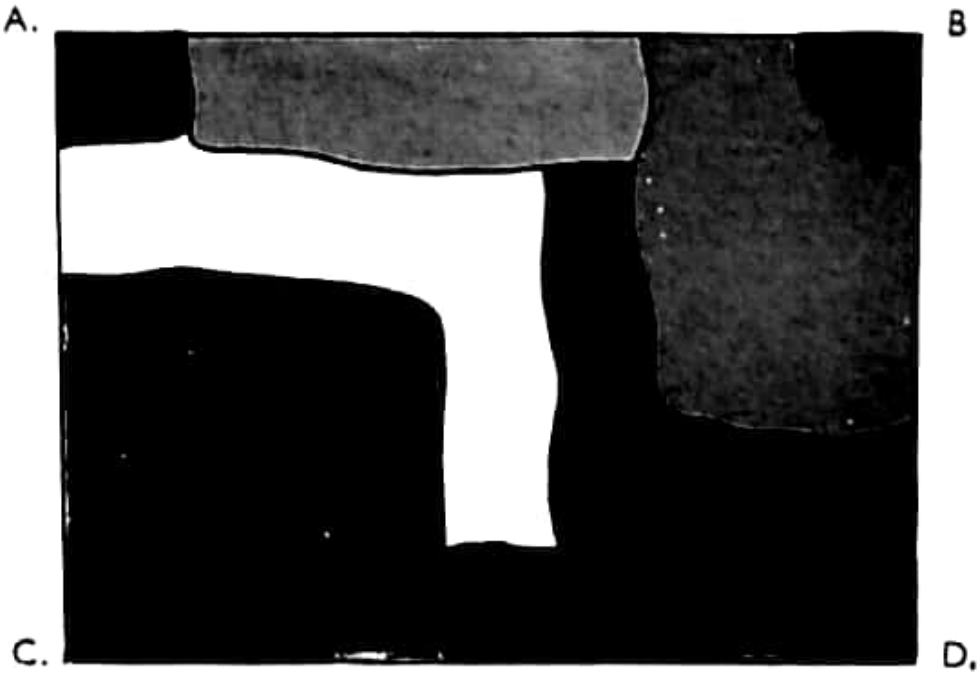


Fig. 68 a. — pe tor

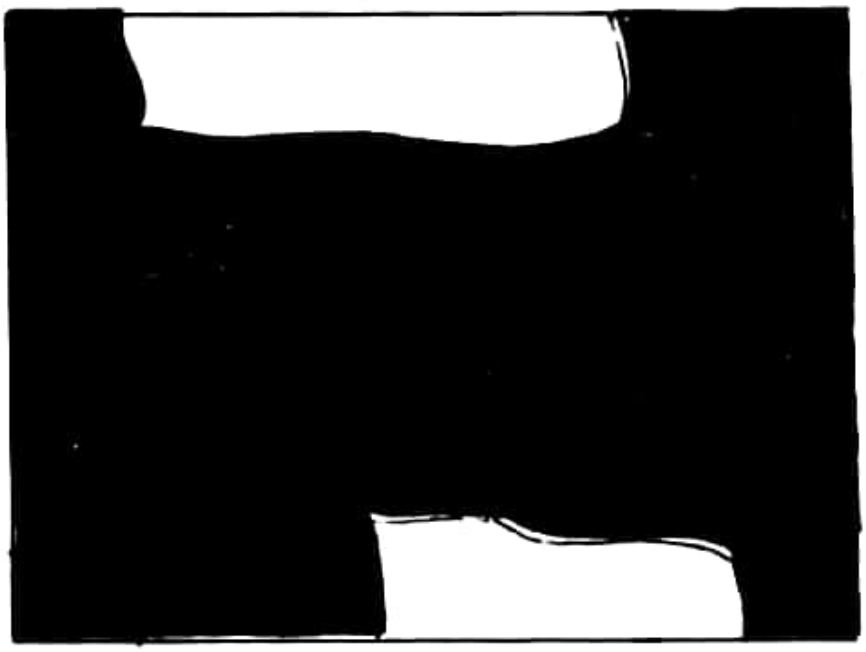


Fig. 68 b. — pe sferă

Lei 5

Autoarea cărții, pasionată cercetătoare a matematicii și a istoriei acestei științe, a dovedit și cu alte prilejuri — de exemplu în prețuita sa „Istorie a numărului" — că tainele matematicii pot fi cunoscute nu numai în cadrul arid pe care îl creează unii specialiști.

Orice intelectual, orice matematician „serios", ca să nu mai vorbim de elevii care populează cu numele lor bogata rubrică a rezolvărilor de probleme din „Gazeta matematică" sînt o atracție deosebită pentru genul abordat de Florica Câmpan. Dar nu numai ei. Într-adevăr, cine a făcut, de exemplu, o legătură între problema împărțirii unui segment în medie și extremă rație, pe de-o parte, și efectul estetic diferit produs de proporțiile dimensionale ale unei așezări arhitectonice, pe de altă parte, a putut constata că în spatele unor cifre în formule se ascund frumuseți și revelații de netăgăduit. Acest lucru îl probează, dacă mai e nevoie, și volumul de față.

Editura tineretului